Minimax tétel

Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és

$$v_1 = \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} XAY, \quad v_2 = \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} XAY,$$

a játék alsó és felső értéke, ahol S_1 az első, S_2 a második játékos stratégiáinak halmaza.

Tétel: (Minimax tétel) Az A kifizetési mátrixszal rendelkező $m \times n$-es mátrixjáték esetén $v_1 = v_2$ teljesül.

Tétel: Az A kifizetési mátrixszal rendelkező $m \times n$-es mátrixjátéknak akkor és csakis akkor van egyensúlyi helyzete, ha a játéknak létezik a v_1 alsó értéke és a v_2 felső értéke, és a kettő egyenlő.

Bizonyítás: *Szükségesség.* Nyilvánvaló, hogy mátrixjátékokra mind a játék alsó értéke, mind a felső értéke létezik.

Először belátjuk, hogy $v_1 \leq v_2$. A minimum definíciója alapján bármely $X \in S_1$-re és $Y \in S_2$-re teljesül, hogy

$$\min_{Y \in S_2} XAY \leq XAY.$$

Vegyük mindkét oldalon az összes $X \in S_1$-re nézve a maximumot:

$$\max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} XAY \leq \max_{X \in S_1} XAY.$$

Ez az egyenlőtlenség bármely $Y \in S_2$-re teljesül, így

$$v_1 = \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} XAY \leq \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} XAY = v_2.$$

(Megj.: Eddig nem használtuk, hogy van egyensúlyi helyzet.)

Igazoljuk, hogy $v_2 \leq v_1$. Tegyük fel, hogy $X^* \in S_1$ és $Y^* \in S_2$ egyensúlyi helyzete az A $m \times n$-es mátrixhoz tartozó mátrixjátéknak. Az egyensúlyi helyzet definíciója alapján

$$XAY^* \leq X^*AY^* \leq X^*AY \tag{1}$$

fennáll minden $X \in S_1$-re és minden $Y \in S_2$-re. Az (1) egyenlőtlenség baloldali részéből kapjuk a következő egyenlőtlenséget:

$$\max_{X \in S_1} XAY^* \leq X^*AY^*;$$

majd a következőt:

$$\min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} XAY \leq \max_{X \in S_1} XAY^* \leq X^*AY^*. \tag{2}$$

Hasonlóan az (1) jobboldali egyenlőtlenségéből kiindulva az előzővel analóg egyenlőtlenséghez jutunk:

$$X^*AY^* \leq \min_{Y \in S_2} X^*AY \leq \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} XAY. \tag{3}$$

A (2) és (3) alapján kapjuk, hogy

$$\min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} XAY \leq \max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} XAY,$$

azaz $v_2 \leq v_1$. Korábban láttuk, hogy $v_1 \leq v_2$, ezért $v_1 = v_2$, azaz

$$\max_{X \in S_1} \min_{Y \in S_2} XAY = \min_{Y \in S_2} \max_{X \in S_1} XAY,$$

és így a szükségesség bizonyítva van.

Elegendőség. Tegyük fel, hogy $v_1 = v_2$, azt szeretnénk belátni, hogy a játéknak van egyesúlyi helyzete. Válasszuk $X^* \in S_1$-et és $Y^* \in S_2$-t a következőképp:

$$\max_{X\in S_1} \min_{Y\in S_2} XAY = \min_{Y\in S_2} X^*AY, \tag{4}$$

$$\min_{Y\in S_2} \max_{X\in S_1} XAY = \max_{X\in S_1} XAY^*. \tag{5}$$

A minimum és a maximum definíciójából következik:

$$\min_{Y\in S_2} X^*AY \le X^*AY^*, \tag{6}$$

$$X^*AY^* \le \max_{X\in S_1} XAY^*. \tag{7}$$

Mivel a feltétel miatt a (4) és (5) baloldala egyenlő, ezért (4), (5), (6), (7) bal- és jobboldala mind egyenlő, tehát

$$\max_{X\in S_1} XAY^* = X^*AY^*$$

teljesül. Így

$$XAY^* \le X^*AY^* \tag{8}$$

fennáll minden $X \in S_1$-re. Hasonlóan

$$X^*AY^* \le X^*AY \tag{9}$$

érvényes minden $Y \in S_2$-re. A (8) és (9) alapján X^*, Y^* egyensúlyi helyzete az A kifizetési mátrixszal rendelkező mátrixjátéknak.

■

Következmény: Bármely $m \times n$-es mátrixjátéknak létezik egyensúlyi helyzete.