Játékelmélet feladatok

Véges fákkal ábrázolt játékok

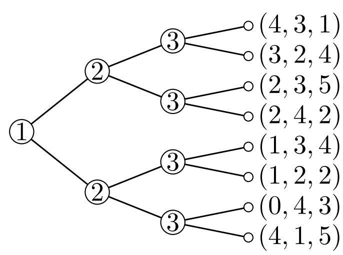
1. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 darab 1-fokú pontja van.

(a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?
(b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
(c) Hány ilyen fa van, ha a pontokat nem különböztetjük meg?

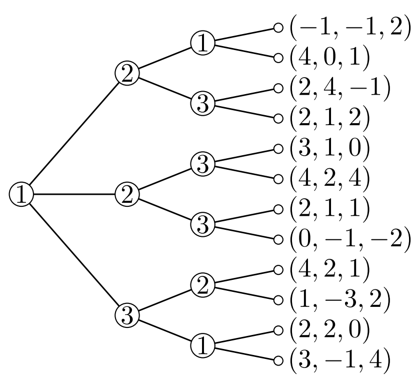
2. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

3. Feladat. A síkban adott 14 különböző pont. Andi és Balázs felváltva kötnek össze két különböző pontot egy éllel. A játék kezdetén semelyik két pont sincs összekötve, az első élt Andi rajzolja. Az veszít, aki olyan élt rajzol be, amellyel a gráfban keletkezik kör. Milyen esélye van Andinak, illetve Balázsnak, hogy nyerjen?

4. Feladat. Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.



5. Feladat. Határozza meg a következő véges gyökeres fával ábrázolt játék egyensúlyát.



6. Feladat. Egy áruházlánc ellenőrzése alatt tart egy piacot, amire belép egy vállalkozó. Az áruházláncnak két stratégiája van: engedi, hogy a vállalkozó a piacon maradjon vagy kiszorítja. A vállalkozó stratégiái: megmarad a piacon vagy kilép. Az egyes kifizetések a következők: ha a vállalkozó kilép, akkor az áruházlánc nyeresége 4 egység a vállalkozóé 1 egység. Ha a vállalkozó nem lép ki a piacról, de az áruházlánc utána kiszorítja, akkor nem nyernek semmit, ha nem szorítja ki, akkor mindkét szereplő 3-3 egységet nyer. Adja meg a problémához tartozó véges gyökeres fát, és határozza meg az egyensúlyát.

A $2 \times n$-es és $n \times 2$-es mátrixjátékok

7. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

9. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

10. Feladat. Andi és Balázs szócsatát játszik. Andi az a, *ű*, míg Balázs az r, z, d betűkből választ egyet-egyet egyszerre. Ha Andi olyan értelmes szót tud alkotni a kiválasztott két betűből, ami nem ige, akkor 1 Ft-ot kap Balázstól, ha ige, akkor 5 Ft-ot kap, ha nem tud értelmes szót alkotni, akkor Balázs kap 3 Ft-ot Anditól. Adja meg a játék kifizetési mátrixát. Határozza meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

11. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5-ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 & 2 & 6 \\ 1 & 5 & 5 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

12. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×5-ös mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 6 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 5 & 5 \end{pmatrix}.$$

13. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 4 & 7 & 1 \end{pmatrix}.$$

14. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 2×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

15. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 5×2-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg grafikus módszer segítségével mindkét játékos optimális stratégiáját.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 1 & 2 \\ 3 & -1 \\ -1 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

A 3×3-as mátrixjátékok

16. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as szimmetrikus mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

17. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Alakítsa át a mátrixot úgy, hogy egy szimmetrikus mátrixjátékot kapjon. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

18. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

19. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét. (Segítség: mind az első, mind a második játékos optimális stratégiájának mind a három komponense pozitív.)

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 4 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & -3 & 9 \end{pmatrix}.$$

20. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 6 \\ 8 & -2 & 0 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

21. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 3 \\ 8 & -2 & 3 \\ 4 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Diagonális játékok

22. Feladat. Az alábbi A mátrix egy 4×4-es diagonális mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg mindkét játékos optimális stratégiáját, valamint a játék értékét.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lineáris programozás

23. Feladat. Számolja ki a következő mátrix inverzét elemi bázistranszformáció segítségével.

$$\begin{pmatrix} -1 & -3 & -4 \\ 0 & -1 & -4 \\ -2 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

24. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(y_1, y_2 \geq 0)$

$$\begin{array}{rcl} y_1 - y_2 & \leq & 3 \\ 2y_1 - 3y_2 & \leq & 8 \\ \hline 2y_1 + y_2 & \to & \max \end{array}$$

25. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5 \geq 0)$

$$\begin{array}{rcl} y_1 - y_5 & \leq & 20 \\ y_1 + y_3 & \leq & 30 \\ y_1 + y_2 + y_4 & \leq & 10 \\ y_2 - y_3 - y_4 + y_5 & \leq & 0 \\ \hline y_1 + 2y_2 + 3y_3 + 4y_4 + 5y_5 & \to & \max \end{array}$$

26. Feladat. Oldja meg a következő normál feladatot szimplex algoritmus segítségével. $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{rrrcc} & x_2 & +3x_3 & \leq & 1 \\ x_1 & +2x_2 & -x_3 & \leq & 5 \\ 2x_1 & & +x_3 & \leq & 2 \\ \hline 2x_1 & +4x_2 & +x_3 & \to & \max \end{array}$$

27. Feladat. Az alábbi mátrix egy 3×3-as mátrixjáték kifizetési mátrixa. Adja meg az egyik játékos optimális stratégiáját lineáris programozás segítségével.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

28. Feladat. Oldja meg a következő lineáris programozási feladatot kétfázisú módszer segítségével. $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{rrrcc} 2x_1 & +2x_2 & +x_3 & \leq & 8 \\ x_1 & +2x_2 & +2x_3 & \geq & 10 \\ \hline x_1 & +x_2 & +x_3 & \to & \max \end{array}$$

29. Feladat. Oldja meg a következő lineáris programozási feladatot kétfázisú módszer segítségével. $(x_1, x_2, x_3 \geq 0)$

$$\begin{array}{rrrcc} 2x_1 & +x_2 & & \leq & 11 \\ x_1 & +2x_2 & +x_3 & = & 12 \\ 2x_1 & +3x_2 & +2x_3 & = & 21 \\ \hline x_1 & +x_2 & +x_3 & \to & \max \end{array}$$

Bimátrixjátékok

30. Feladat. Oldja meg azt a 2×2-es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

31. Feladat. Oldja meg azt a 2×2-es bimátrixjátékot, ahol az 1. játékos kifizetéseit a következő A mátrix, a 2. játékos kifizetéseit pedig az A' mátrix tartalmazza.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}, \qquad A' = \begin{pmatrix} 8 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

32. Feladat. (*Fogoly-dilemma*) Két férfit fegyveres rablással gyanúsítanak, nincs döntő bizonyíték ellenük, de ők ezt nem tudják. A rendőr felajánlja mindkettőjüknek, hogy ha bevallja a rablást, de a másik tagad, akkor a beismerő vallomást tevő rabot felmentik, a tagadó rab 20 évet kap. Ha mindketten vallanak, akkor az enyhítő körülmény, így 5-5 évet kapnak. Ha mindketten tagadnak, akkor a rájuk bizonyítható tiltott fegyverviselésért 1-1 évet kapnak. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

33. Feladat. (*Ajándékozási-dilemma*) A Young házaspárnak mindössze két kincse van, Jim családi örökségéből származó aranyórája és Della szép, hosszú haja. Karácsonyra meg akarják lepni egymást valami szép ajándékkal. Tudják egymásról, hogy mire vágynak; Jim egy óraláncra, Della pedig egy fésűs csatra. Mivel szegények, ezért pénzt csak a meglévő kincsük eladásával tudnak szerezni, de ezzel értéküket vesztik az ajándékok is. Ha mindketten eladják az értékeiket, akkor annak a szituációnak az értéke legyen 0. Az ajándékozás örömét értékeljük 2 egységgel, a megajándékozott örömét 1 egységgel. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

34. Feladat. (*Családi vita*) Egy fiatal házaspár este szórakozni akar menni. A férfi egy ökölvívó mérőzést szeretne megnézni, a nő pedig színházba szeretne menni. Nem tudják előre megbeszélni, de csak akkor mennek el valahova, ha ugyanazt választják. Ha odamennek, amit szeretnének, annak legyen 2 egység az értéke, ha nem odamennek, annak 1 egység, ha pedig otthon maradnak, annak -1 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

35. Feladat. (*Duopólium*) Egy kis országban csak két vállalat gyárt acélt. Mindkét cég kétféle árajánlatot tehet, magasat vagy alacsonyat. Ha mindkét vállalat magas árat ajánl, akkor legyen a profitjuk 10 egység, ha az egyik alacsonyat ajánl, a másik magasat, akkor az alacsonyabbat fogják választani a vásárlók, így annak vállalatnak a profitja legyen 14 egység, a másiké -1 egység. Ha mindketten alacsony árat ajánlanak, akkor legyen a profit 7 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

36. Feladat. (*Legnagyobb kedvezmény elve*) Egy kis országban csak két vállalat gyárt acélt. A vállalatok szerződésben garantálják a vevőknek, hogyha a jövőben másnak alacsonyabb árat ajánlanak, akkor a tőle kért árat is erre az alacsonyabb szintre szállítják le. Ha mindkét vállalat magas árat ajánl, akkor legyen a profitjuk 10 egység, ha az egyik alacsonyat ajánl, a másik magasat, akkor az alacsonyabb árat ajánló vállalatnak az árgaranciákat is be kell váltani, így annak vállalatnak a profitja legyen 9 egység, a másiké -1 egység. Ha mindketten alacsony árat ajánlanak, akkor legyen a profit 7 egység. Oldja meg a feladathoz tartozó bimátrixjátékot.

Kooperatív játékok

37. Feladat. Egy halastó tulajdonosa el akarja adni a tavat. Két vevő pályázik rá, az egyik horgásztavat akar kialakítani, a másik egy csúszdaparkot szeretne építeni a tónál. A halastó haszna 5 millió forint, a horgásztóval 10 millió forint, a csúszdaparkkal 15 millió forint hasznot érhetnek el. Adja meg a feladathoz tartozó 3-személyes kooperatív játék karakterisztikus függvényét.

38. Feladat. Az ENSZ biztonsági tanácsának 5 állandó és 10 választott tagja van. Egy határozat akkor lép életbe, ha az 5 állandó, és legalább 4 választott tag megszavazza. Adjon meg a feladathoz tartozó olyan súlyozott többségi szavazást, ahol a választott tagok súlya legyen 1, és az állandó tagok súlya a lehető legkisebb egész szám.

39. Feladat. Végezzen $(0,1)$-normalizációt a $\Gamma(N,v)$ 4-személyes kooperatív játékon, ha $N=\{1,2,3,4\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S\subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S)=\begin{cases} 2, & \text{ha } |S|=1; \\ 5, & \text{ha } |S|=2; \\ 7, & \text{ha } |S|=3; \\ 10, & \text{ha } S=N. \end{cases}$$

40. Feladat. Végezzen $(0,1)$-normalizációt a $\Gamma(N,v)$ 6-személyes kooperatív játékon, ha $N=\{1,2,3,4,5,6\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S\subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S)=\begin{cases} 1, & \text{ha } |S|=1; \\ 3, & \text{ha } |S|=2; \\ 5, & \text{ha } |S|=3; \\ 7, & \text{ha } |S|=4; \\ 10, & \text{ha } |S|=5; \\ 12, & \text{ha } S=N. \end{cases}$$

41. Feladat. Határozza meg a $(3;4,1,1)$ súlyozott többségi szavazáshoz tartozó karakterisztikus függvényt, és döntse el, hogy teljesül-e a szuperadditivitás.

42. Feladat. Igazolja, hogy a **37. Feladatban** megadott karakterisztikus függvény szuperadditív, és határozza meg a kooperatív játék magját.

43. Feladat. Határozza meg a $\Gamma(N,v)$ 3-személyes kooperatív játék magját, ha $N=\{1,2,3\}$, és a karakterisztikus függvény tetszőleges $S\subseteq N$ koalícióra a következő:

$$v(S)=\begin{cases} 0, & \text{ha } |S|=1; \\ 0, & \text{ha } S=\{1,3\}; \\ 2, & \text{ha } S=\{1,2\}; \\ 4, & \text{ha } S=\{2,3\}; \\ 4, & \text{ha } S=N. \end{cases}$$

44. Feladat. Igazolja, hogy a **37. Feladatban** megadott 3-személyes kooperatív játék esetén az alábbi B stabil halmaz (millió forintban számolva):

$$B=\{(x_1,x_2,x_3)\colon 5\le x_1\le 15,\ x_2=0,\ x_3=15-x_1\}.$$