3×3-as mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v.

Tiszta vs kevert tétel következménye: Legyen X az első játékos, Y a második játékos optimális stratégiája.

(1) Ha X i. komponensére $x_i > 0$, akkor $A_{i\cdot}Y = v$.
(2) Ha Y j. komponensére $y_j > 0$, akkor $XA_{\cdot j} = v$.

Optimális stratégia tétele:

(1) Az X az első játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow$ $v \leq XA_{\cdot j},\ j = 1, 2, \ldots, n$.
(2) Az Y a második játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow$ $A_{i\cdot}Y \leq v,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

A megoldás menete

1. lépés: Nyeregpontot keresünk. Ha van, akkor megoldottuk a feladatot. Ha nincs, akkor a játék értéke a sor minimumok maximuma és az oszlop maximumok minimuma között lesz, folytatjuk a 2. lépésnél.

2. lépés: Dominált sorokat illetve oszlopokat keresünk. Ha találunk, akkor a 4. lépésnél folytatjuk a megoldást. Ha nem találtunk elhagyható sort vagy oszlopot, akkor a 3. lépéssel folytatjuk.

3. lépés: Vizsgáljuk, hogy lehetséges-e, hogy mind az első, mind a második játékos optimális megoldásának mind a három komponense pozitív legyen. Ekkor alkalmazhatjuk a Tiszta vs. kevert tétel következményét. Továbbá mivel az x_i-k és az y_i-k valószínűségek, így $\sum_{i=1}^{3} x_i = \sum_{i=1}^{3} y_i = 1$ teljesül.

(a) Mivel feltettük, hogy $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk a második játékos Y optimális stratégiájára.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ v \\ v \end{pmatrix}.$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az y_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + a_{13}y_3 &= v \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + a_{23}y_3 &= v \\ a_{31}y_1 + a_{32}y_2 + a_{33}y_3 &= v \end{aligned} \tag{1}$$

$$y_1 + y_2 + y_3 = 1$$

$$y_1 > 0 \ y_2 > 0 \ y_3 > 0$$

Ezt az egyenletrendszert kell megoldani hogy megkapjuk a második játékos optimális megoldását. Az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételt elhagyjuk, a végén ellenőrizzük le majd, hogy az egyenletek megoldásai teljesítik-e. Az egyenletrendszer így 4 egyenletet és 4 ismeretlen tartalmaz (y_1, y_2, y_3, v). Az egyenletek és az ismeretlenek számát is 1-gyel csökkenthetjük azáltal, hogy az első egyenletből kivonjuk a másodikat, a másodikból pedig a harmadikat:

$$\begin{aligned}(a_{11}-a_{21})y_1+(a_{12}-a_{22})y_2+(a_{13}-a_{23})y_3 &= 0\\ (a_{21}-a_{31})y_1+(a_{22}-a_{32})y_2+(a_{23}-a_{33})y_3 &= 0\\ y_1+y_2+y_3 &= 1\end{aligned}$$

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$\begin{array}{lll} k_1=a_{11}-a_{21} & k_2=a_{12}-a_{22} & k_3=a_{13}-a_{23}\\ k_4=a_{21}-a_{31} & k_5=a_{22}-a_{32} & k_6=a_{23}-a_{33}\end{array}$$

A most bevezetett jelölésekkel az egyenletrendszer a következő lesz:

$$\begin{aligned}k_1y_1+k_2y_2+k_3y_3 &= 0\\ k_4y_1+k_5y_2+k_6y_3 &= 0\\ y_1+y_2+y_3 &= 1\end{aligned}\tag{2}$$

Ezt az egyenletrendszert legegyszerűbb a Cramer-szabály alapján megoldani (ha $D\neq 0$):

$$D=\begin{vmatrix}k_1&k_2&k_3\\k_4&k_5&k_6\\1&1&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}k_2&k_3\\k_5&k_6\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}k_1&k_3\\k_4&k_6\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}k_1&k_2\\k_4&k_5\end{vmatrix}$$

$$y_1=\frac{\begin{vmatrix}0&k_2&k_3\\0&k_5&k_6\\1&1&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}k_2&k_3\\k_5&k_6\end{vmatrix}}{D}$$

$$y_2=\frac{\begin{vmatrix}k_1&0&k_3\\k_4&0&k_6\\1&1&1\end{vmatrix}}{D}=-\frac{\begin{vmatrix}k_1&k_3\\k_4&k_6\end{vmatrix}}{D}$$

$$y_3=\frac{\begin{vmatrix}k_1&k_2&0\\k_4&k_5&0\\1&1&1\end{vmatrix}}{D}=\frac{\begin{vmatrix}k_1&k_2\\k_4&k_5\end{vmatrix}}{D}$$

Az eddigi számolást célszerű az (1) egyenletrendszer bővített mátrixán elvégezni. (Bővített mátrixot úgy kapjuk, hogy az egyenletrendszer mátrixához hozzáírjuk utolsó oszlopként a jobboldali konstansok oszlopát.) Kivonjuk az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}a_{11}&a_{12}&a_{13}&v\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&v\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&v\\1&1&1&1\end{array}\right)\Rightarrow\left(\begin{array}{ccc|c}k_1&k_2&k_3&0\\k_4&k_5&k_6&0\\1&1&1&1\end{array}\right)$$

Az utóbbi mátrixból már kiszámítható könnyebben y_1, y_2, y_3. Ellenőrizzük az $y_1 > 0, y_2 > 0, y_3 > 0$ feltételeket, ha nem tejesülnek a 4. lépésnél folytatjuk. Ha teljesülnek az egyenlőtlenségek a játék értéke is kiszámítható az (1) első három egyenlete közül valamelyikbe az y_1, y_2, y_3 helyettesítésével.

(b) A második játékos optimális megoldásához hasonlóan kapható meg az első játékos optimális megoldása. Mivel $y_1 > 0$, $y_2 > 0$, $y_3 > 0$ a Tiszta vs. kevert tétel következményét felhasználva a következőt kapjuk az első játékos $X = (x_1, x_2, x_3)$ optimális stratégiájára.

$$(x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = (v, v, v).$$

Elvégezve a beszorzást, valamint az x_i-kre, mint valószínűségekre vonatkozó feltételeket hozzávéve, a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3 &= v \\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3 &= v \\ a_{13}x_1 + a_{23}x_2 + a_{33}x_3 &= v \end{aligned} \qquad (3)$$

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1$$

$$x_1 > 0 \; x_2 > 0 \; x_3 > 0$$

A második egyenletből kivonjuk a harmadikat, az elsőből a másodikat:

$$\begin{aligned} (a_{11} - a_{12})x_1 + (a_{21} - a_{22})x_2 + (a_{31} - a_{32})x_3 &= 0 \\ (a_{12} - a_{13})x_1 + (a_{22} - a_{23})x_2 + (a_{32} - a_{33})x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1. \end{aligned} \qquad (4)$$

Legyen

$$\begin{matrix} \ell_1 = a_{11} - a_{12}, & \ell_2 = a_{21} - a_{22} & \ell_3 = a_{31} - a_{32} \\ \ell_4 = a_{12} - a_{13} & \ell_5 = a_{22} - a_{23} & \ell_6 = a_{32} - a_{33} \end{matrix} .$$

Ezzel a jelöléssel a (4) egyenletrendszerből a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} \ell_1 x_1 + \ell_2 x_2 + \ell_3 x_3 &= 0 \\ \ell_4 x_1 + \ell_5 x_2 + \ell_6 x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \end{aligned} .$$

A Cramer-szabály alapján megkapjuk az x_1, x_2, x_3 ismeretleneket:

$$D = \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \ell_2 & \ell_3 \\ 0 & \ell_5 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_2 & \ell_3 \\ \ell_5 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & 0 & \ell_3 \\ \ell_4 & 0 & \ell_6 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = -\frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_3 \\ \ell_4 & \ell_6 \end{vmatrix}}{D}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{\begin{vmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_4 & \ell_5 \end{vmatrix}}{D}$$

Megjegyezzük, hogy a második játékos optimális stratégiájának kiszámításakor is D-vel jelöltük az együttható mátrix determinánsát, de ez nem véletlen, a két determináns értéke megegyezik.

Ha a második játékos optimális stratégiának kiszámolásához hasonlóan bővített mátrix segítségével szeretnénk megkapni az x_i-ket, akkor tekintsük a (3) egyenletrendszert. Látszik, hogy itt az egyenletrendszer mátrixa nem a kifizetési mátrix, hanem annak transzponáltja. Kivonva az első sorból a második sort, a másodikból a harmadikat, olyan mátrixot kapunk, amiből az x_1, x_2, x_3 könnyebben számítható:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} & | & v \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & | & v \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & | & v \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \ell_1 & \ell_2 & \ell_3 & | & 0 \\ \ell_4 & \ell_5 & \ell_6 & | & 0 \\ 1 & 1 & 1 & | & 1 \end{pmatrix}.$$

4. lépés: Foglalkozzunk most azzal az esettel, amikor a 3×3-as mátrixjáték megoldása helyettesíthető, egy kisebb mátrixjáték megoldásával.

(a) Ha a 2. lépésben a dominálás miatt egy vagy több sort vagy oszlopot törültünk a játék mátrixából, akkor 2×3-as, 3×2-es illetve 2×2-es mátrixjátékként oldhatjuk meg a 3×3-as mátrixjátékot.

(b) A 3. lépésben kiderülhet, hogy nincs olyan megoldása, ahol az első és a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív, például a $D = 0$, vagy az optimális megoldások kiszámításakor olyan számokat kaptunk, amelyek nem lehetnek valószínűségek. Ekkor legalább egy stratégiát 0 valószínűséggel játszanak, tehát a 3×3-as mátrixjátékot vissza lehet vezetni kisebb játékra.
Nézhetjük sorra a lehetséges 2×3-as (vagy 3×2-es) feladatokat. Megnézhetjük az adott 3×3-as mátrix 9 db 2×2 részmátrixának megoldását is.
Úgy tudjuk **ellenőrizni**, hogy egy kisebb mátrixjáték megoldásával az eredeti 3×3-as mátrixjáték optimális megoldásához jutottunk, hogy mind az első, mind a második játékosra nézve a kapott megoldásoknak teljesíteni kell az Optimális stratégia tétele feltételeit a 3×3-as mátrixjátékra nézve.