# A $2 \times 2$-es mátrixjátékok megoldása

Legyen az $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$ mátrix egy $2 \times 2$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa. Ha van nyeregpont, akkor az annak megfelelő tiszta stratégiák adják a játék megoldását. Az alábbi két esetben nincs nyeregpont, ekkor kevert stratégiát kell alkalmazni:

1) $a < b,\ a < c,\ d < c,\ d < b$;
2) $a > b,\ a > c,\ d > c,\ d > b$.

Jelölje $X^* = \left(\begin{smallmatrix} x, & 1-x \end{smallmatrix}\right)$ az első játékos optimális kevert stratégiáját, $Y^* = \left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right)$ pedig a második játékos optimális kevert stratégiáját. Mivel tudjuk, hogy nem tiszta stratégiát használnak, ezért teljesülnek a következő egyenlőtlenségek:

$$0 < x < 1, \quad 0 < 1 - x < 1, \quad 0 < y < 1, \quad 0 < 1 - y < 1.$$

Abból, hogy az optimális stratégiák egyik komponense sem nulla a Tiszta vs. kevert tétel felhasználásával a következőket kapjuk:

$$X^* A_{\cdot 1} = v, \quad X^* A_{\cdot 2} = v, \quad A_{1 \cdot} Y^* = v, \quad A_{2 \cdot} Y^* = v,$$

ahol $v$ a játék értéke és $A_{\cdot 1}$ az $A$ mátrix első oszlopát, $A_{\cdot 2}$ a második oszlopát, $A_{1 \cdot}$ az első sorát, az $A_{2 \cdot}$ pedig a második sorát jelöli. A mátrix elemeivel megadva a fenti összefüggések a következő alakúak lesznek:

$$\left(\begin{smallmatrix} x & 1-x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} a \\ c \end{smallmatrix}\right) = v, \quad \left(\begin{smallmatrix} x & 1-x \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} b \\ d \end{smallmatrix}\right) = v, \quad \left(\begin{smallmatrix} a & b \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) = v, \quad \left(\begin{smallmatrix} c & d \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} y \\ 1-y \end{smallmatrix}\right) = v.$$

Elvégezve a mátrixszorzásokat a következő egyenletrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} ax + c(1-x) &= v \\ bx + d(1-x) &= v \\ ay + b(1-y) &= v \\ cy + d(1-y) &= v. \end{aligned}$$

Az első két egyenletnél a baloldalakat egyenlővé téve kifejezhető az $x$, míg a második két egyenletből megkaphatjuk az $y$-t. Továbbá $x$-et visszahelyettesítve az első egyenletbe kapjuk a játék értékét, $v$-t:

$$x = \frac{d - c}{a - b - c + d}, \quad y = \frac{d - b}{a - b - c + d}, \quad v = \frac{ad - bc}{a - b - c + d}.$$

Vegyük észre, hogy a játék értékének kiszámításakor a számlálóban az $A$ mátrix determinánsa szerepel.