

## Tiszta vs. kevert tétel (bizonyítással)

**Jelölés:**  $A_i$ : az  $A$  mátrix  $i$ . sorvektora,  $A_j$ : az  $A$  mátrix  $j$ . oszlopvektora.

**Tétel:** (Tiszta vs. kevert tétel) Legyen  $A = (a_{ij})$  egy  $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és  $v$  a játék értéke.

(1) Legyen  $Y^*$  a második játékos optimális stratégiája. Ha

$$A_i \cdot Y^* < v,$$

akkor  $x_i^* = 0$  az első játékos bármely  $X^*$  optimális stratégiájában.

(2) Legyen  $X^*$  az első játékos optimális stratégiája. Ha

$$X^* A_j > v,$$

akkor  $y_j^* = 0$  a második játékos minden  $Y^*$  optimális stratégiájában.

**Bizonyítás:** Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.

Mivel  $Y^*$  a második játékos optimális stratégiája, így ha az első játékos az  $i$ -edik tiszta stratégiáját alkalmazza ellene, a nyeresége kisebb vagy egyenlő, mint játék értéke:

$$A_i \cdot Y^* \leq v, \quad i = 1, \dots, m.$$

Jelölje  $S_1, S_2$  a következő index halmazokat:

$$S_1 = \{i : A_i \cdot Y^* < v\}, \quad S_2 = \{i : A_i \cdot Y^* = v\}.$$

Ekkor:

$$\begin{aligned} v &= X^* A Y^* = \sum_{i=1}^m x_i^* A_i \cdot Y^* \\ &= \sum_{i \in S_1} x_i^* A_i \cdot Y^* + \sum_{i \in S_2} x_i^* A_i \cdot Y^* \\ &= \sum_{i \in S_1} x_i^* A_i \cdot Y^* + \sum_{i \in S_2} x_i^* v. \end{aligned}$$

Átrendezve

$$\begin{aligned} v - \sum_{i \in S_2} x_i^* v &= \sum_{i \in S_1} x_i^* A_i \cdot Y^*, \\ v \left(1 - \sum_{i \in S_2} x_i^*\right) &= \sum_{i \in S_1} x_i^* A_i \cdot Y^*. \end{aligned}$$

Mivel  $X^*$  komponensei valószínűségeket jelölnek, így  $\sum_{i=1}^m x_i^* = 1$ . Továbbá  $S_1$  és  $S_2$  index halmazok diszjunktak, egyesítésük pedig kiadja az összes indexet, ezért  $1 - \sum_{i \in S_2} x_i^* = \sum_{i \in S_1} x_i^*$ . Ezt felhasználva kapjuk:

$$v \sum_{i \in S_1} x_i^* = \sum_{i \in S_1} x_i^* A_i \cdot Y^* \Rightarrow \sum_{i \in S_1} (v - A_i \cdot Y^*) x_i^* = 0.$$

Mivel  $S_1$  mindenegyik  $i$  elemére  $v - A_i \cdot Y^* > 0$  ezért szükségképpen ezen  $i$  indexekre  $x_i^* = 0$ . ■