

Tiszta vs. kevert tétel (bizonyítás nélkül)

Jelölés: A_i : az A mátrix i . sorvektora, A_j : az A mátrix j . oszlopvektora.

Ha A egy mátrixjáték kifizetési mátrixa, akkor az XA_j a várható kifizetés, amikor az első játékos az X kevert stratégiáját használja, és a második játékos a j . tiszta stratégiát. Hasonlóan az A_iY kifejezés azt a várható kifizetést adja, amikor a második játékos az Y kevert stratégiát választja, az első pedig az i . tiszta stratégiát.

Tétel: (Tiszta vs. kevert tétel) Legyen $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$ -es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és v a játék értéke.

(1) Legyen Y^* a második játékos optimális stratégiája. Ha

$$A_i Y^* < v,$$

akkor $x_i^* = 0$ az első játékos bármely X^* optimális stratégiájában.

(2) Legyen X^* az első játékos optimális stratégiája. Ha

$$X^* A_j > v,$$

akkor $y_j^* = 0$ a második játékos minden Y^* optimális stratégiájában.

Bizonyítás: ld. a 4. előadásnál.

Megjegyzés: A fenti tétel (1) állítását úgy lehet szavakkal megfogalmazni, hogy ha $A_i Y^* < v$ teljesül, azaz az első játékos az i . stratégiáját alkalmazva a játék értékénél kevesebbet nyerne, akkor az optimális stratégiájában nem használja az i . stratégiát, vagyis $x_i^* = 0$. A (2) hasonlóan fogalmazható meg a második játékos j . stratégiájára, ott akkor rossz a stratégia, ha v -nél többet veszít a játékos.

Következmény: Mivel az optimális megoldás definíciójából adódik, hogy $A_i Y^* \leq v$ teljesül, így a fenti tétel alapján, ha $x_i^* > 0$, akkor $A_i Y^* = v$ -t kapjuk. Hasonlóan, ha $y_j^* > 0$, akkor $X^* A_j = v$ teljesül. Ezt többször is használni fogjuk a mátrixjátékok megoldása során, például a 2×2 -es és a 3×3 -as mátrixjátékoknál.