

Stratégiai ekvivalencia és a $(0, 1)$ -normalizáció

Jelölések: $\Gamma(N, v)$ az az n -személyes kooperatív játék, ahol $N = \{1, 2, \dots, n\}$ a játékosok halmaza, a v pedig a játékhoz tartozó karakterisztikus függvényt jelöli.

Definíció: A $\Gamma(N, v)$ n -személyes kooperatív játékot *lényeges (valódi) játéknak* nevezzük, ha $v(N) > \sum_{i=1}^n v(\{i\})$ teljesül.

Definíció: A $\Gamma(N, v)$ és $\Gamma(N, v')$ n -személyes kooperatív játékok *stratégiaileg ekvivalensek*, ha léteznek olyan a_1, a_2, \dots, a_n valós számok, és $c > 0$ valós szám, amelyre

$$v'(S) = cv(S) + \sum_{i \in S} a_i, \quad \text{bármely } S \subseteq N\text{-re.}$$

Megjegyzés: A stratégiai ekvivalencia olyan reláció, amely reflexív, szimmetrikus és tranzitív, azaz ekvivalenciareláció, így tartozik hozzá egy osztályozás. A következő definíció és tétel segítségével minden osztályból kijelölhető egy speciális tulajdonságú elem.

Definíció: A $\Gamma(N, v)$ n -személyes kooperatív játék $(0, 1)$ -normalizált, ha teljesülnek a következők:

- (1) $v(\{i\}) = 0$, bármely $i = 1, 2, \dots, n$ esetén;
- (2) $v(N) = 1$.

Tétel: Minden valódi $\Gamma(N, v)$ n -személyes kooperatív játék stratégiaileg ekvivalens egy egyértelműen meghatározott $(0, 1)$ -normalizált játékkal.

Bizonyítás: Keressük a $\Gamma(N, v)$ -vel stratégiaileg ekvivalens $\Gamma(N, v')$ játékot, amelyre igaz, hogy $v'(\{i\}) = 0$ bármely $i = 1, \dots, n$ -re és $v'(N) = 1$, azaz $(0, 1)$ -normalizált. A stratégiai ekvivalencia definíciójából adódóan a következők teljesülnek:

$$v'(\{i\}) = cv(\{i\}) + a_i = 0, \quad i = 1, \dots, n; \quad (1)$$

$$v'(N) = cv(N) + \sum_{i=1}^n a_i = 1. \quad (2)$$

Az (1) egyenletből kapjuk:

$$a_i = -cv(\{i\}). \quad (3)$$

Az (1)-ben szereplő n egyenletet összegezve kapjuk: $\sum_{i=1}^n a_i = -c \sum_{i=1}^n v(\{i\})$. Ezt behelyettesítve a (2) egyenletbe

$$cv(N) - c \sum_{i=1}^n v(\{i\}) = 1. \quad (4)$$

Mivel feltettük, hogy a játék valódi, így a definíció alapján $v(N) - \sum_{i=1}^n v(\{i\}) > 0$. Tehát a (4) egyenletből kifejezhetjük a c -t:

$$c = \frac{1}{v(N) - \sum_{i=1}^n v(\{i\})} > 0. \quad (5)$$

A (3)-ba behelyettesítve, amit a c -re az (5)-ben kaptunk:

$$a_i = -cv(\{i\}) = \frac{-v(\{i\})}{v(N) - \sum_{i=1}^n v(\{i\})}. \quad (6)$$

Mivel az (1) és (2) egyértelmű megoldása az (5) és a (6), így a v' is egyértelműen meghatározott, tehát egyetlen $(0, 1)$ normalizált játék van minden ekvivalenciaosztályban.