Optimális stratégia tétele (bizonyítással)

Definíció: Az X^*, Y^* egyensúlyi helyzet, ha $XAY^* \leq X^*AY^* \leq X^*AY$, bármely X, Y stratégiára. Ekkor az X^*-ot az első, Y^*-ot pedig a második játékos *optimális stratégiájának* nevezzük. A *játék értéke* a $v = X^*AY^*$ kifejezés.

Tétel: (Optimális stratégia tétele) Legyen az $A = (a_{ij})$ egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, és legyen a játék értéke v.

(1) Az X^* az első játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow v \leq X^*A_{\cdot j},\ j = 1, 2, \ldots, n$.

(2) Az Y^* a második játékos optimális stratégiája $\Longleftrightarrow A_{i\cdot}Y^* \leq v,\ i = 1, 2, \ldots, m$.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló.
Mivel $v = X^*AY^*$ definició szerint, így a „$\Rightarrow$” irány (szükségesség) következik az egyensúlyi helyzet definíciójából.
Bizonyítsuk az „$\Leftarrow$” irányt (elegendőséget). Induljunk ki abból, hogy

$$v \leq X^*A_{\cdot j},\ j = 1, \ldots, n \tag{1}$$

teljesül, be kell látnunk, hogy ekkor X^* optimális stratégia.
Legyen (X^0, Y^0) a játék egy optimális megoldása (egyensúlyi helyzete). Ez azt jelenti, hogy

$$XAY^0 \leq X^0AY^0 \leq X^0AY \tag{2}$$

bármely X, Y stratégiára. Bebizonyítjuk, hogy (X^*, Y^0) is optimális megoldása az adott mátrixjátéknak.
Legyen $Y = (y_1, \ldots, y_n)$ a második játékos tetszőleges kevert stratégiája. Szorozzuk be az (1) egyenlőtlenséget y_j-vel minden j-re, majd összegezzük. (Megjegyezzük, hogy mivel Y egy kevert sratégia, így $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$). Ekkor a következőt kapjuk:

$$v = \sum_{j=1}^{n} vy_j \leq \sum_{j=1}^{n} X^*A_{\cdot j}\, y_j = X^*AY. \tag{3}$$

Speciálisan a (3) egyenlőtlenségben Y helyébe Y^0-t helyettesítve:

$$v \leq X^*AY^0. \tag{4}$$

Az egyensúlyi helyzet (= optimális megoldás) definíciójából következik, hogy (2) alapján

$$X^*AY^0 \leq X^0AY^0 = v. \tag{5}$$

(4)-ből és (5)-ből kapjuk, hogy

$$X^*AY^0 = X^0AY^0 = v. \tag{6}$$

$(2), (6)$ és (3) alapján $XAY^0 \leq X^0AY^0 = X^*AY^0 = v \leq X^*AY$, így:

$$XAY^0 \leq X^*AY^0 \leq X^*AY$$

teljesül bármely X, Y stratégára, azaz X^* az első játékos optimális stratégiája.

■