Kétfázisú módszer

Egy lineáris programozási feladat nem biztos, hogy normál alakú, például mátrixjátékoknál az első játékos optimális stratégiájának meghatározásakor $\geq$ kikötések fordulnak elő. Az is lehet, hogy az összefüggések között $=$ szerepel. Az ilyen típusú problémák megoldására alkalmazzuk a kétfázisú módszert.

1. lépés: Ha valamelyik jobboldali konstans nem pozitív, akkor szorozzuk (-1)-gyel az egyenlőtlenséget. Ha célfüggvénynél minimumot kell meghatározni, akkor azt is szorozzuk meg (-1)-gyel. Ha valamelyik összefüggésben szerepel $\geq$, akkor alakítsuk át egyenlőséggé új nemnegatív változó bevezetésével a következő képpen:

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m \geq b_i \quad \Leftrightarrow \quad a_{i1}x_1 + \ldots + a_{im}x_m - v = b_i.$$

2. lépés: Az 1. lépés átalakításai után csak $=$ és $\leq$ szerepel. A *táblázatot* úgy készítjük el, hogy ahol egyenlőség van, ott a kiemelt változókat *-gal jelöljük, ezek a mesterséges változók. A cél az, hogy a mesterséges változók 0 értéket vegyenek fel, azaz a táblázat felső sorába kerüljenek. Ha felkerültek, nem szabad visszahozni, így az oszlopukat el is hagyjuk a táblázatból. Kialakítunk egy *másodlagos célfüggvényt* is, ami úgy keletkezik, hogy az egyenlőség jellegű kifejezések megfelelő együtthatóit összeadjuk (azaz azokban a sorokban adjuk össze, ahol a *-gal jelölt változók szerepelnek). A sarokelemet úgy kapjuk, hogy a jobboldali konstansokat összeadjuk ezekben a sorokban. A táblázat elkészítését mutatja a lenti példa.

3. lépés: Az *első fázisban* a másodlagos célfüggvény szerint optimalizálunk (ld. Szimlex algoritmus). Ha a másodlagos célfüggvény szerinti optimumnál a másodlagos sarokelem nem nulla, akkor nincs a feladatnak lehetséges megoldása. Ha a másodlagos sarokelem 0, és *-os változók már nem szerelepnek, akkor következhet az 5. lépés (második fázis). Ha maradtak *-os változók, akkor akár negatív generálóelem is választható ahhoz, hogy a felső sorba kerüljenek, és elhagyjuk őket. Végül, ha már csak 0 van a *-os változó sorában, akkor elhagyható az egész sor.

4. lépés: A *második fázisban* az elsődleges célfüggvény szerint keressük meg az optimális megoldást (ld. Szimplex algoritmus).

Példa. Az 1. és 2. lépést megmutatjuk egy példán keresztül.

$$\begin{array}{rcl} -x_1 - x_2 - x_3 & \geq & -10 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \geq & 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 & \geq & 2 \\ x_1, x_2, x_3 & \geq & 0 \\ \hline -x_1 - 2x_2 - 4x_3 & \to & \min \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{rcl} x_1 + x_2 + x_3 & \leq & 10 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 & = & 12 \\ x_1 + 2x_2 + 2x_3 - v_1 & = & 4 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - v_2 & = & 2 \\ x_1, x_2, x_3, v_1, v_2 & \geq & 0 \\ \hline x_1 + 2x_2 + 4x_3 & \to & \max \end{array}$$

A szimplex táblázat:

	x_1	x_2	x_3	v_1	v_2	
u_1	1	1	1	0	0	10
u_2^*	2	1	4	0	0	12
u_3^*	1	2	2	-1	0	4
u_4^*	2	1	1	0	-1	2
	1	2	4	0	0	0
	5	4	7	-1	-1	18