Diagonális mátrixjátékok

Segédtétel: Legyen A egy $m \times n$-es mátrixjáték kifizetési mátrixa, v a játék értéke.

(1) Ha X az első játékos valamely stratégiája, továbbá a olyan szám, amelyre teljesül
$$XA_{\cdot j} \geq a, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{$*$}$$
akkor $a \leq v$.

(2) Ha Y a második játékos valamely stratégiája, és b olyan szám, amelyre fennáll
$$A_{i\cdot} Y \leq b, \quad i = 1, 2, \ldots, m,$$
akkor $b \geq v$.

Bizonyítás: Az (1) állítást bizonyítjuk, a (2) állítás bizonyítása hasonló. Tekintsük a második játékos (egyik) optimális $Y^{*T} = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_n^*)$ stratégiáját, és a (*) egyenlőtlenségeit. Szorozzuk be (*) j-edik egyenlőtlenségét y_j^*-vel (fontos, hogy $y_j^* \geq 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$). A következő egyenlőtlenségeket kapjuk:
$$XA_{\cdot j} y_j^* \geq a y_j^* \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$
Ha az egyenlőtlenségeket összeadjuk a következő egyenlőtlenséghez jutunk:
$$\sum_{j=1}^{n} XA_{\cdot j} y_j^* = XAY^* \geq a \sum_{j=1}^{n} y_j^* = a. \tag{$**$}$$
Ha X^* jelöli az első játékos Y^*-gal párban álló optimális stratégiáját, akkor az optimális megoldás definíciója alapján:
$$XAY^* \leq X^* A Y^* = v$$
teljesül. Ezt (**)-gal összevetve $a \leq v$ következik.

■

Definíció: Ha egy mátrixjáték kifizetési mátrixa a következő alakú:
$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$
ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \ldots, n)$, akkor a játékot *diagonális mátrixjátéknak* (vagy röviden *diagonális játéknak*) nevezzük.

Megjegyzés: A diagonális mátrixjátékot lehet "keresési" játékként interpretálni. A második játékos elrejt egy tárgyat a szóbajöhető n hely valamelyikében. Amennyiben az első játékos megtalálja az elrejtett tárgyat, mégpedig a j-edik helyen, akkor nyereménye a_j, ha nem találja meg, akkor nyereménye 0.

Tétel: Bármely diagonális játék értéke pozitív.

Bizonyítás: Legyen az első játékost egyik lehetséges stratégiája a következő:
$$X = \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n} \right).$$

Jelölje s az $\frac{1}{n}a_j$, $(j = 1, \ldots, n)$ számok minimumát, mivel $a_j > 0$, így $s > 0$ is teljesül. Fennáll

$$XA_{\cdot j} = \frac{1}{n}a_j \geq s, \quad (j = 1, \ldots, n);$$

ahonnan a segédtétel szerint $v \geq s > 0$.

■

Tétel: Ha egy diagonális játékban az első játékos egyik optimális stratégiája $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$, akkor X^* valamennyi komponense pozitív.

Bizonyítás: Indirekt úton bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy $x_i^* = 0$. A második játékos válassza az i-edik tiszta stratégiát. Ekkor

$$v \leq X^*A_{\cdot i} = x_1^* \cdot 0 + \ldots + x_{i-1}^* \cdot 0 + 0 \cdot a_i + x_{i+1}^* \cdot 0 + \ldots + x_n^* \cdot 0 = 0.$$

Így $v \leq 0$-t katunk, ami ellentmond az előző tétel állításának.

■

A diagonális mátrixjáték megoldása

Mivel az előző tétel alapján az első játékos bármely optimális stratégiájának valamennyi komponense pozitív, ezért az Tiszta vs kevert tétel következménye szerint a második játékos bármely $Y^{*T} = (y_1^*, \ldots, y_n^*)$ optimális stratégiájára fennáll, hogy $A_{i\cdot}Y^* = v$. Mivel A diagonális, így

$$a_i y_i^* = v \quad (i = 1, \ldots, n).$$

A diagonális mátrixjáték definíciója miatt $a_i > 0$ teljesül, így

$$y_i^* = v/a_i \quad (i = 1, \ldots, n). \tag{$\clubsuit$}$$

Az egyenleteket összeadva

$$\sum_{i=1}^{n} y_i = v\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right).$$

Ahonnan figyelembe véve, hogy $\sum_{i=1}^{n} y_i^* = 1$, megkapjuk a játék értékét:

$$v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Ha v-t ($\clubsuit$)-be behelyettesítjük akkor a második játékos optimális megoldásának komponenseit kitudjuk számítani:

$$y_i^* = \frac{1}{a_i}\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Vegyük észre, hogy a második játékos optimális megoldásának valamennyi komponense pozitív. Az Tiszta vs kevert tétel következménye szerint ebből az következik, hogy az első játékos $X^* = (x_1^*, \ldots, x_n^*)$ optimális megoldására az $X^*A_{\cdot j} = v$ egyenlet áll fenn bármely $1 \leq j \leq n$-re. Tehát

$$X^*A_{\cdot j} = v = \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Mivel $a_j x_j^* = v$, így

$$x_j^* = \frac{1}{a_j} \cdot \frac{1}{\sum_{k=1}^{n} 1/a_k}.$$

Látható, hogy a diagonális játéknak egyetlen optimális megoldása van.