

3. feladatsor – Lineáris leképezések MEGOLDÁSOK

3.1. Feladat. A sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében tekintsük a következő transzformációkat. Döntsük el, hogy lineáris transzformációk-e. Ha igen, akkor adjuk meg a magjukat, képterüket és azok dimenzióját, bázisát.

- (a) nem lineáris
- (b) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(0, 1), (1, 0)$.
- (c) nem lineáris
- (d) $\text{Ker } \varphi = \{(0, b) : b \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(0, 2)$. $\text{Im } \varphi = \{(a, 0) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(1, 0)$.
- (e) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(0, 1), (1, 3)$.
- (f) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(1, 1), (\pi, 0)$.
- (g) $\text{Ker } \varphi = \{(a, b) : a + b = 0\} \subseteq \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(1, -1)$. $\text{Im } \varphi = \{(a, a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 1$, egy bázisa: $(1, 1)$.
- (h) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(2, 1/2), (-1, 2)$.
- (i) $\text{Ker } \varphi = \{(0, 0)\}$, $\dim(\text{Ker } \varphi) = 0$, bázisa az üreshalmaz. $\text{Im } \varphi = \mathbb{R}^2$, $\dim(\text{Im } \varphi) = 2$, egy bázisa: $(-1, 1), (3, 3)$.

3.2. Feladat. Melyek lineárisak az alábbi leképezések közül? Amelyik lineáris, annak határozzuk meg a standard bázisban megadott mátrixát.

- (a) Nem lineáris
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{1} & \bar{2} \\ 2 & \bar{1} & 0 \end{pmatrix}$
- (d) Nem lineáris

3.3. Feladat. Határozzuk meg a következő φ lineáris transzformációk mátrixát a megadott $\mathcal{E}$ bázisban. Számítsuk ki a v vektor φ melletti képének koordinátáit ebben a bázisban.

- (a) $\begin{pmatrix} -1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, (-1, -1)$
- (b) $\begin{pmatrix} \bar{0} & \bar{1} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}, (\bar{1}, \bar{0})$
- (c) $\begin{pmatrix} 2 & 4 & -2 \\ -1/2 & -1 & 2 \\ -1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (1, 3, 1)$
- (d) $\begin{pmatrix} \bar{2} & \bar{2} & \bar{2} \\ \bar{2} & 0 & 0 \\ \bar{2} & \bar{2} & 0 \end{pmatrix}, (\bar{0}, \bar{1}, \bar{1})$

3.4. Feladat. Tekintsük a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterén értelmezett alábbi φ és ψ lineáris transzformációkat. Határozzuk meg a $\varphi + \psi$, a $\varphi\psi$ és a $\psi\varphi - 3\psi$ lineáris transzformációkat.

- (a) $\varphi + \psi$ a zérus transzformáció (azaz bármely vektor képe az origó), $\varphi\psi$ az origóra vonatkozó középpontos tükrözés, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.
- (b) $\varphi + \psi$ az identikus transzformáció, $\varphi\psi$ a zérus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$.
- (c) $\varphi + \psi$ $\pi/4$ -gyel való forgatás és $\sqrt{2}$ -szörös nyújtás, $\varphi\psi$ az origó körüli $\pi/2$ szögű forgatás, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.
- (d) $\varphi + \psi$ és $\varphi\psi$ is az identikus transzformáció, $\psi\varphi - 3\psi$ a következő (standard bázisban értendő) mátrix által meghatározott transzformáció: $\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{3\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{3\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

3.5. Feladat. Döntse el, hogy az u , illetve v vektor sajátvektora-e az A mátrixnak:

- (a) u sajátvektor, v nem;
- (b) u és v sajátvektor.

3.6. Feladat. Döntse el, hogy λ sajátértéke-e az A mátrixnak:

- (a) igen;
- (b) nem.

3.7. Feladat. Legyen a V vektortérben értelmezett lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban A . Határozzuk meg a lineáris transzformációk karakterisztikus polinomját, sajátértékeit, valamint adjunk meg bázist a sajátaltérben.

- (a) A karakterisztikus polinom $x^2 - 3x$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisa: $0, (1, 1); 3, (-2, 1)$.
- (b) A karakterisztikus polinom $x^2 - 2x + 3$, nincs valós sajátérték
- (c) A karakterisztikus polinom $x^2 - 2x + 3$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisa: $1 + \sqrt{2}i, (-i/\sqrt{2}, 1); 1 - \sqrt{2}i, (i/\sqrt{2}, 1)$
- (d) A karakterisztikus polinom $x^2 + x + \bar{1}$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisa: $\bar{1}, (\bar{1}, \bar{1})$.
- (e) A karakterisztikus polinom $(x - 3)^2(x + 1)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisa: $3, (-1, 1, 0), (-1, 0, 1); -1, (0, 1, -5)$.
- (f) A karakterisztikus polinom $-(x + 3)^2(x - 9)$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisa: $-3, (0, 1, 0); 9, (2, -1, -2)$.
- (g) A karakterisztikus polinom $(\bar{1} - x)(x^2 + 2x + \bar{1})$, a sajátértékek és a hozzá tartozó sajátaltér egy bázisa: $\bar{1}, (\bar{1}, \bar{1}, \bar{2}); \bar{2}, (\bar{0}, \bar{1}, \bar{2})$.

3.8. Feladat. Határozzuk meg a sík $\mathbb{R}^2$ vektorterében értelmezett következő lineáris transzformációk sajátértékeit, valamint a sajátalterek egy bázisát.

- (a) Sajátértéke az 1, bázis a sajátaltérben: $(1, 0), (0, 1)$.
- (b) Sajátértéke a 0, bázis a sajátaltérben: $(1, 0), (0, 1)$
- (c) Sajátértékek és bázisok: $1, (1, 0), -1, (0, 1)$.
- (d) Sajátértékek és bázisok: $1, (0, 1), 0, (1, 0)$.
- (e) Nincs (valós) sajátérték.