

8. feladatsor – Kódolás MEGOLDÁSOK

8.1. Feladat. Meghatározzuk a C minimális távolságát, hány hibajelző ill. -javító. Lineáris-e?

- (a) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris;
- (b) 3 a minimális távolság, vagyis 2-hibajelző és 1-hibajavító. Nem lineáris (nincs benne a nullvektor);
- (c) 2 a minimális távolság, vagyis 1-hibajelző és 0-hibajavító. Lineáris.

8.2. Feladat. Igazoljuk, hogy lineáris. Megadjuk az információs rátáját, a hozzá tartozó szisztematikus kódot és annak ellenőrző- és generátormátrixát.

- (a) A linearitás igazolása: zárt az összeadásra (bármely két vektor összege eleme C -nek); \mathbb{Z}_2 felett a skalárral szorzást nem kell ellenőrizni; Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{4} = \frac{1}{2}$. $D = \{0000, 1011, 0110, 1101\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Információs ráta: $\frac{\log_2 4}{5} = \frac{2}{5}$. $D = \{00000, 10111, 01111, 11000\}$,

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (c) Információs ráta: $\frac{\log_3 9}{4} = \frac{1}{2}$.

$$D = \{0000, 1021, 2012, 0101, 0202, 1122, 2211, 1220, 2110\},$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.3. Feladat. Kódszó-e v , ha nem, megadjuk a legközelebbi kódszót.

- (a) Nem, mert $vP = 100$, ahol P az ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 11011.
- (b) Nem, mert $vP = 0020$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 211122.
- (c) Nem, mert $vP = 012$ lesz a P ellenőrzőmátrix. Legközelebbi szó: 212010.

8.4. Feladat. Hamming-kód ellenőrző- és generátormátrixa, információs rátája.

- (a) $n = 3$ és $|K| = 2$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{3}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, G = (1 \ 1 \ 1).$$

- (b) $n = 5$ és $|K| = 2$ -höz r nem egész, így ilyen Hamming-kód NINCS.

(c) $n = 7$ és $|K| = 2$ miatt $r = 3$, információs ráta $\frac{4}{7}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(d) $n = 4$ és $|K| = 3$ miatt $r = 2$, információs ráta $\frac{1}{2}$.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

8.5. Feladat. Meghatározzuk az összes n -hosszú ciklikus lineáris kódot.

(a) $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1) = (x + 2)(x^2 + x + 1)$, vagyis három ilyen kód van.

$$g_1 = x + 2\text{-re a kód generátormátrixa: } G_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_2 = x^2 + x + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (C_3 = \mathbb{Z}_3^3).$$

(b) $x^4 + 1 = (x + 1)^4$ miatt négy ilyen kód van.

$$g_1 = 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_1 = E_4 \quad (C_1 = \mathbb{Z}_2^4).$$

$$g_2 = x + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_3 = x^2 + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$g_4 = x^3 + x^2 + x + 1\text{-re a kód generátormátrixa: } G_4 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

8.6. Feladat. Megadjuk a BCH-kód generátormátrixát.

(a) α (és α^2) minimálpolinomja $x^3 + x^2 + 1$, így

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(b) α (és α^2) minimálpolinomja $g_1 = g_2 = x^4 + x + 1$,

α^3 minimálpolinomja $g_3 = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ ($\text{lko}(g_1, g_3) = 1$), így

$\text{lkk}(g_1, g_3) = g_1 g_3 = x^8 + x^7 + x^6 + x^4 + 1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix};$$

(c) α minimálpolinomja $g_1 = x^3 + x^2 + 2$,

α^2 minimálpolinomja pedig $g_2 = x^3 + 2x^2 + 2x + 2$ ($\text{lko}(g_1, g_2) = 1$), így

$\text{lkk}(g_1, g_2) = g_1 g_2 = x^6 + x^4 + x + 1$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$