

6. feladatsor – Polinomok MEGOLDÁSOK

6.1. Feladat. Az f és a g polinomok legnagyobb közös osztója a megadott polinomgyűrűkben.

- (a) $x + 1$;
- (b) $x^2 + 6x - 7$;
- (c) $x^4 - x^3 + x^2 - 2x + 1$;
- (d) $x^2 - \bar{1}$;
- (e) $x^2 + \bar{3}$.

6.2. Feladat. Az $f = x^4 + 2x^3 - 7x^2 - 8x + 12$ és a $g = x^4 + x^3 - x^2 - 4x - 12$ racionális együtthatós polinomok közös gyökei, majd ennek felhasználásával az f és g összes gyöke.

$\lnko(f, g) = x^2 - 4$, közös gyökök: $2, -2$, $f = (x - 2)(x + 2)(x - 1)(x + 3)$,
 $(x - 2)(x + 2)(x^2 + x + 3)$.

6.3. Feladat. Az egyenletek megoldása.

- (a) Egy megoldás: $u_0 = x, v_0 = x^2 + x + 1$,
általános: $u = x + (x^2 + 1)t, v = x^2 + x + 1 + (x^3 + x^2 + 1)t$;
- (b) Egy megoldás: $u_0 = 1, v_0 = 2x$,
általános: $u = 1 + (x + 2)t, v = 2x + (2x^2 + x + 2)t$;
- (c) Egy megoldás: $u_0 = 3x, v_0 = 2x^2 + 3x$,
általános: $u = 3x + (3x^2 + 3x + 3)t, v = 2x^2 + 3x + (2x^3 + 2)t$.

6.4. Feladat. Hányszoros gyöke az f polinomnak a c szám, majd ennek segítségével az f polinom szorzattá alakítása.

- (a) kétszeres; $(x - 3)^2(x^3 + 2x + 1)$;
- (b) háromszoros; $(x - 3)^3(x^2 + x - 2)$;
- (c) háromszoros; $(x - i)^3(x^2 - 2)$;
- (d) háromszoros; $(x - \bar{2})^3(x + \bar{2})$.

6.5. Feladat. A polinomok irreducibilis felbontása a \mathbb{Q}, \mathbb{R} és \mathbb{C} testek felett.

- (a) $x(x^2 + 3)(x^2 - 2)$ (\mathbb{Q} felett), $x(x^2 + 3)(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ (\mathbb{R} felett),
 $x(x - i\sqrt{3})(x + i\sqrt{3})(x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$ (\mathbb{C} felett);
- (b) $x^2(x + 2)(x^2 - 2x + 4)$ (\mathbb{Q} és \mathbb{R} felett), $x^2(x + 2)(x - 1 + i\sqrt{3})(x - 1 - i\sqrt{3})$;
- (c) $(x^2 + 5)(x^2 - 5)$ (\mathbb{Q} felett), $(x^2 + 5)(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})$ (\mathbb{R} felett),
 $(x - \sqrt{5})(x + \sqrt{5})(x - i\sqrt{5})(x + i\sqrt{5})$ (\mathbb{C} felett);
- (d) $(x^2 - 3)(x^4 + 3x^2 + 9)$ (\mathbb{Q} felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x^2 - \sqrt{3}x + 3)(x^2 + \sqrt{3}x + 3)$ (\mathbb{R} felett),
 $(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x - \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x - \frac{\sqrt{3}+3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}-3i}{2})(x + \frac{\sqrt{3}+3i}{2})$;
- (e) $x^2(x + 2)(x - 2)(x^2 + 2)$ (\mathbb{Q} és \mathbb{R} felett), $x^2(x + 2)(x - 2)(x - i\sqrt{2})(x + i\sqrt{2})$.

6.6. Feladat. A polinomok racionális gyökei és irreducibilis felbontásuk $\mathbb{Q}[x]$ -ben.

- (a) Rac. gyök: $2, (x - 2)(x^2 + x + 1)$;
- (b) Rac. gyök: $1/2, (x^2 + 1)(x^2 - 2)(2x - 1)$;
- (c) Rac. gyök: $1, -1/2, 2(x - 1)(2x + 1)(x^2 + 2x + 2)$.

6.7. Feladat. Az $f \in \mathbb{Q}[x]$ polinomok irreducibilisek.

- (a) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 3$;
- (b) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 2$ vagy $p = 5$;
- (c) Schönemann-Eisenstein tétel, $p = 11$.