

5. feladatsor – Kvadratikus alakok, Euklideszi terek MEGOLDÁSOK

5.1. Feladat. Bilineáris-e l ? Ha igen, adjuk meg mátrixát. Ha szimmetrikus, a hozzá tartozó q kvadratikus alakot is adjuk meg.

- (a) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_2^2$;
- (b) nem bilineáris;
- (c) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, nem szimmetrikus;
- (d) nem bilineáris;
- (e) bilineáris, mátrixa: $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, szimmetrikus, $q = x_1^2 + x_2^2$.

5.2. Feladat. Hozzuk kanonikus alakra, határozzuk meg az osztályát.

- (a) y_1^2 , pozitív szemidefinit;
- (b) $-4y_1^2 - 3y_2^2$, negatív definit;
- (c) $8y_1^2 + \frac{1}{2}y_2^2$, pozitív szemidefinit;
- (d) $y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2$, pozitív definit;
- (e) $2y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{1}{2}y_3^2$, indefinit.

5.3. Feladat. Keressünk olyan S -t, amire SAS^T diagonális.

- (a) $S = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{1} & \bar{1} \end{pmatrix}$;
- (b) Pl.: $S = \begin{pmatrix} \bar{1} & \bar{0} & \bar{0} \\ \bar{2} & \bar{1} & \bar{0} \\ \bar{3} & \bar{4} & \bar{1} \end{pmatrix}$. (Minden $\begin{pmatrix} \bar{1} + 2\bar{a} & \bar{a} & \bar{4}\bar{a} \\ \bar{2}\bar{b} & \bar{b} & \bar{1} + 4\bar{b} \\ \bar{2}\bar{c} & \bar{c} & \bar{4}\bar{c} \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{Z}$ alakú mátrix jó.)

5.4. Feladat. Hajtsuk végre a megadott vektorrendszeren a Gram-Schmidt algoritmust. (Ezek a vektorrendszerek már normáltak is.)

- (a) $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2), (-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2)$;
- (b) $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$;
- (c) $(\frac{1}{\sqrt{38}}, \frac{6}{\sqrt{38}}, \frac{1}{\sqrt{38}}), (\frac{\sqrt{37}}{\sqrt{38}}, -3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{703}}, -\frac{1}{\sqrt{1406}}), (0, \frac{1}{\sqrt{37}}, \frac{-6}{\sqrt{37}})$;
- (d) $(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}), (0, 1, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}})$.

5.5. Feladat. Adjuk meg \mathbb{R}^3 egy sajátvektorokból álló bázisát.

- (a) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$
(a transzformáció sajátértékei: 1, 1, 3);
- (b) $(0, 0, 1), (\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0), (\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$
(a transzformáció sajátértékei: 3, 3, -1).