3. feladatsor – Bázis, Rang
MEGOLDÁSOK

3.1. Feladat. Megoldások:

(a) $x_1 = 2,\ x_2 = -3,\ x_3 = -1;$

(b) nincs megoldás;

(c) $x_4 = 1,\ x_1 = 2x_2 - x_3, \quad x_2, x_3 \in \mathbb{R};$

(d) $x_1 = 16 - 3x_2 + 3x_4,\ x_3 = 4 + x_4, \quad x_2, x_4 \in \mathbb{R}.$

3.2. Feladat. Rang, lineáris függetlenség

(a) $r = 3$, lineárisan független;
(b) $r = 2$, lineárisan függő;
(c) $r = 3$, lineárisan független;
(d) $r = 2$, lineárisan függő;
(e) $r = 2$, lineárisan függő.

3.3. Feladat. Rang, maximális nemeltűnő aldetermináns:

(a) $r = 2,\ \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix};$

(b) $r = 3,\ \begin{vmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 2 & 4 & 8 \\ 9 & 3 & 1 \end{vmatrix};$

(c) $r = 1$, tetszőleges nem nulla elemből álló 1×1-es mátrix determinánsa megfelelő.

3.4. Feladat. $r = 3$.

3.5. Feladat. Az U alterek elemei:

(a) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0})\};$
(b) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{2},\overline{1}),(\overline{2},\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{0},\overline{1}),(\overline{0},\overline{2},\overline{2}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{2}),$
$(\overline{2},\overline{2},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{1})\};$
(c) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{1},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2},\overline{1})\};$
(d) $U = \{(\overline{0},\overline{0},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{0},\overline{2},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{1},\overline{0},\overline{1}),(\overline{1},\overline{2},\overline{0},\overline{1}),$
$(\overline{2},\overline{0},\overline{0},\overline{2}),(\overline{2},\overline{1},\overline{0},\overline{2}),(\overline{2},\overline{2},\overline{0},\overline{2})\}.$

3.6. Feladat. Előállítások és koordinátasorok:

(a) $(\overline{1},\overline{0},\overline{0}) = (\overline{0},\overline{1},\overline{0}) + (\overline{1},\overline{1},\overline{0})$, koordinátasora: $(\overline{0},\overline{1},\overline{1});$
(b) $(\overline{1},\overline{0},\overline{1}) = (\overline{1},\overline{1},\overline{1}) + (\overline{0},\overline{1},\overline{0})$, koordinátasora: $(\overline{1},\overline{1},\overline{0}).$

3.7. Feladat. Dimenziók és bázisok:

(a) $\dim U = 3$, bázis: $(0,1,2,4),(2,-1,2,2),(1,-1,1,2);$

(b) $\dim U = 2$, bázis: $(1,2,4,1),(0,0,3,-1);$

(c) $\dim U = 2$, bázis: $(\overline{1},\overline{4},\overline{2},\overline{3}),(\overline{2},\overline{3},\overline{4},\overline{2});$

(d) $\dim U = 2$, bázis: $(2,1,3,0),(0,0,0,1);$

(e) $\dim U = 2$, bázis: $(3,1,0,0),(1,0,1,0);$

(f) $\dim U = 2$, bázis: $(\overline{0},\overline{1},\overline{0},\overline{0}),(\overline{1},\overline{0},\overline{0},\overline{1}).$

3.8. Feladat. Az $U_1 + U_2$ és $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziói, bázisai:

(a) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 2, 1, 0), (0, 3, 2, 1), (0, 0, 1, 2)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(2, 1, 0, -1)$;

(b) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 2, 1, 3), (0, -2, 3, -1), (0, 0, 1, -3)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(0, 2, -3, 1)$;

(c) $\dim(U_1 + U_2) = 4$, bázis: $(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0), (0, 0, 0, 1)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(3, -3, 2, 1)$;

(d) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(1, 0, 0, 0), (0, 0, 0, 1), (0, 2, 1, 0)$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(-3, 2, 1, -3)$;

(e) $\dim(U_1 + U_2) = 4$, bázis: $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(\overline{1}, \overline{2}, \overline{2}, \overline{1})$;

(f) $\dim(U_1 + U_2) = 5$, bázis: $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}, \overline{0})$,
$(\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 0$;

(g) $\dim(U_1 + U_2) = 3$, bázis: $(\overline{1}, \overline{0}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{1}, \overline{1}, \overline{0}), (\overline{0}, \overline{0}, \overline{0}, \overline{1})$
$\dim(U_1 \cap U_2) = 1$, bázis: $(\overline{1}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{1})$.

3.9. Feladat. A V vektortér és U_1, U_2 altereinek megadott dimenziói esetén határozzuk meg az U_1+U_2 és az $U_1 \cap U_2$ alterek dimenziójának összes lehetséges értékét.

(a) $\dim(U_1 + U_2) = 6$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$,
$\dim(U_1 + U_2) = 5$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 3$;

(b) $\dim(U_1 + U_2) = 5$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$,
$\dim(U_1 + U_2) = 4$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 3$;

(c) $\dim(U_1 + U_2) = 7$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 0$,
$\dim(U_1 + U_2) = 6$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$,
$\dim(U_1 + U_2) = 5$, $\dim(U_1 \cap U_2) = 2$.