Diszkrét matematika II. gyakorlat

Gráfelmélet gyakorlat
Absztrakt algebra

Bogya Norbert

Bolyai Intézet

2015. május 8.

Tartalom

Megyjegyzések

- Az ötödik elektronikus teszt nyitva van. **NO CHROME.**

- **Szavazás.** Mikor legyen a dolgozat a következő alkalommal. Május 15. 14^{00}-18^{00}
  - **Az óra elején.** (Ez lett a szavazás eredménye.)
  - Az óra végén.

Tartalom

Feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámsorozata

(a) $1, 1, 2, 3, 3, 4$;

(b) $3, 3, 4, 4, 5, 5$?

Feladat

Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámsorozata

(a) $1, 1, 2, 3, 3, 4$;

(b) $3, 3, 4, 4, 5, 5$?

(a) igen

(b) igen

Feladat

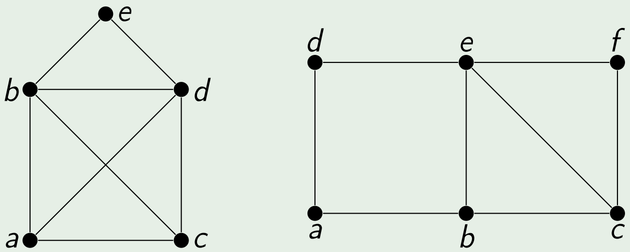
Van-e olyan egyszerű gráf, melynek fokszámsorozata

(a) $1, 1, 2, 3, 3, 4$; (b) $3, 3, 4, 4, 5, 5$?

(a) igen
(b) igen

Feladat

Van-e a következő gráfokban Euler-vonal, zárt Euler-vonal, Hamilton út, Hamilton-kör?



Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Megoldás. 21.

Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Megoldás. 21.

Feladat

Egy 20 pontú fának 18 darab 1 fokú pontja van.

(a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?

(b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?

(c) Hány ilyen fa van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

Feladat

Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek.

Megoldás. 21.

Feladat

Egy 20 pontú fának 18 darab 1 fokú pontja van.

(a) Mennyi lehet a további két pont fokszáma?

(b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?

(c) Hány ilyen fa van, ha a csúcsokat nem különböztetjük meg?

Megoldás.

(a) 2 és 18 között bármi

(b) 3

(c) 9

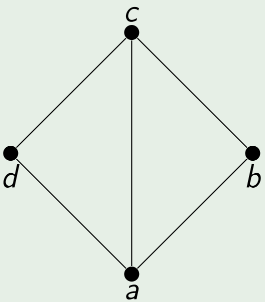
Feladat

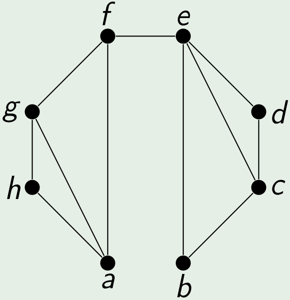
Adjunk meg az alábbi gráfokban

(a) minimális lefogó ponthalmazt;

(b) maximális párosítást;

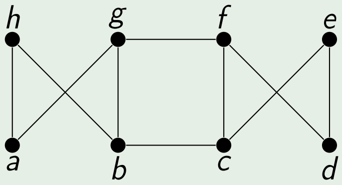
(c) $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét.

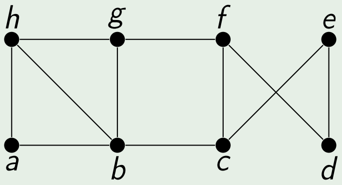




Feladat

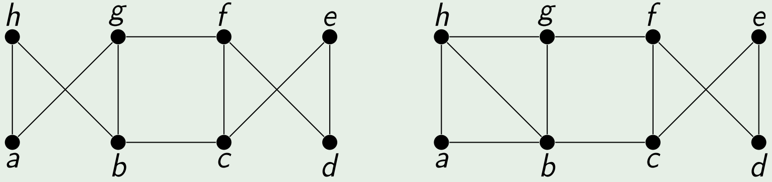
Páros gráfok-e az alábbiak?





Feladat

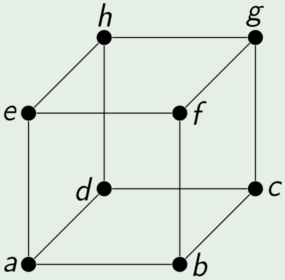
Páros gráfok-e az alábbiak?

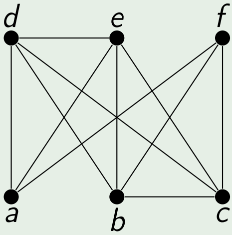


Megoldás. Igen. Nem.

Feladat

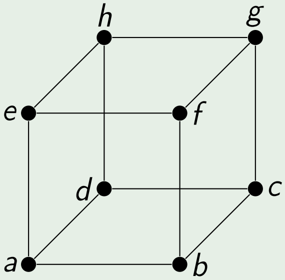
Síkgráfok-e az alábbi gráfok?

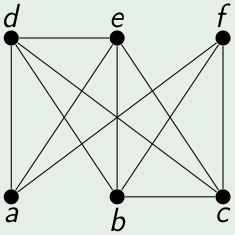




Feladat

Síkgráfok-e az alábbi gráfok?





Megoldás. Igen. Nem.

Tartalom

Művelet

Legyen A nemüres halmaz és $n \in \mathbb{N}$. Az A-n értelmezett n változós műveleten egy $A^n \to A$ leképezést értünk. Az n a művelet változószáma.

Algebra

Ha A nemüres halmaz, F pedig az A-n értelmezett műveletek halmaza, akkor az (A, F) párt algebrának nevezzük.

Példák.

Grupoid

Az algebrákat a műveleteik száma, változószáma és tulajdonságai alapján rendszerezzük.

Grupoid

A grupoid olyan algebra, ahol 1 darab 2-változós művelet van értelmezve.

Grupoid

Az algebrákat a műveleteik száma, változószáma és tulajdonságai alapján rendszerezzük.

Grupoid

A grupoid olyan algebra, ahol 1 darab 2-változós művelet van értelmezve.

Példák.

- $(\mathbb{R}; +)$
- $(\mathbb{Z}; \cdot)$
- $(\{i, h\}; \wedge)$
-

$\circ$	0	1	2	3
0	3	1	0	2
1	2	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	1	3	3

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$\begin{aligned} a \circ x = a \circ y \quad &\Longrightarrow \quad x = y \\ x \circ a = y \circ a \quad &\Longrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$\begin{aligned} a \circ x = a \circ y &\implies x = y \\ x \circ a = y \circ a &\implies x = y. \end{aligned}$$

- Az $o \in A$ **zéruselem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ o = o \circ a = o$.

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$\begin{aligned} a \circ x = a \circ y \quad &\Longrightarrow \quad x = y \\ x \circ a = y \circ a \quad &\Longrightarrow \quad x = y. \end{aligned}$$

- Az $o \in A$ **zéruselem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ o = o \circ a = o$.
- Az $e \in A$ **egységelem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ e = e \circ a = a$.

Műveletek tulajdonságai

Legyen $(A; \circ)$ egy grupoid. A $\circ$ művelet

- **kommutatív**, ha $\forall a, b \in A$ esetén $a \circ b = b \circ a$;
- **asszociatív**, ha $\forall a, b, c \in A$ esetén $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$;
- **kancellatív**, ha $\forall a, x, y \in A$ esetén

$$\begin{aligned} a \circ x = a \circ y &\implies x = y \\ x \circ a = y \circ a &\implies x = y. \end{aligned}$$

- Az $o \in A$ **zéruselem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ o = o \circ a = o$.
- Az $e \in A$ **egységelem**, ha $\forall a \in A$ esetén $a \circ e = e \circ a = a$.
- Ha a grupoidban létezik e egységelem, akkor az a **inverze** b, ha $a \circ b = b \circ a = e$.

Műveletek tulajdonságai

Feladat

Milyen műveleti tulajdonságai vannak az alábbi grupoidok műveleteinek?

(a) $(\mathbb{R};+)$

(b)

$\circ$	0	1	2	3
0	3	1	0	2
1	2	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	1	3	3

Műveletek tulajdonságai

Feladat

Milyen műveleti tulajdonságai vannak az alábbi grupoidok műveleteinek?

(a) $(\mathbb{R};+)$

(b)

$\circ$	0	1	2	3
0	3	1	0	2
1	2	1	1	1
2	0	1	2	3
3	2	1	3	3

Megoldás.

(a) kommutatív, asszociatív, 0 egységelem, nincs zéruselem, a inverze $-a$, kancellatív

(b) nem kommutatív, nem kancellatív, 2 egységelem, nincs zéruselem, 0 inverze 3 és 2 inverze 2

Műveletek tulajdonságai

Tétel

Bármely grupoidban legfeljebb egy darab egységelem és legfeljebb egy darab zéruselem létezik.

Bizonyítás. Lásd a táblán.

Nevezetes algebrák

	asszociatív	egységelemes	inverz	kommutatív
grupoid				
félcsoport	✓			
monoid	✓	✓		
csoport	✓	✓	✓	
Abel-csoport	✓	✓	✓	✓

Nevezetes algebrák

	asszociatív	egységelemes	inverz	kommutatív
grupoid				
félcsoport	✓			
monoid	✓	✓		
csoport	✓	✓	✓	
Abel-csoport	✓	✓	✓	✓

Feladat

Készítsünk halmazábrát az alábbi struktúrákkal: $(\mathbb{N};+)$, $(\mathbb{N}_0;+)$, $(\mathbb{Z};+)$, $(\mathbb{Z}_3;+)$, $(\mathbb{Z}_3;\cdot)$, $(\mathbb{Z};\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\};+)$, $(\mathbb{R};\cdot)$, $(\mathbb{R}\setminus\{0\};\cdot)$, $(\overline{\mathbb{M}}_2;\cdot)$.

Feladat

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \triangle)$ algebrai struktúrát. A $\triangle$ műveletet a következőképpen definiáljuk:

$$a \triangle b = 12 - 3a - 3b + ab$$

Vizsgáljuk az algebrát asszociativitás, kommutativitás szempontjából. Van-e benne egységelem, zéruselem? Milyen elemeknek van inverze?

Feladat

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \triangle)$ algebrai struktúrát. A $\triangle$ műveletet a következőképpen definiáljuk:

$$a \triangle b = 12 - 3a - 3b + ab$$

Vizsgáljuk az algebrát asszociativitás, kommutativitás szempontjából. Van-e benne egységelem, zéruselem? Milyen elemeknek van inverze?

Megoldás. $(\mathbb{R}, \triangle)$ zéruselemes kommutatív monoid

Feladat

Tekintsük az $(\mathbb{R}, \triangle)$ algebrai struktúrát. A $\triangle$ műveletet a következőképpen definiáljuk:

$$a \triangle b = 12 - 3a - 3b + ab$$

Vizsgáljuk az algebrát asszociativitás, kommutativitás szempontjából. Van-e benne egységelem, zéruselem? Milyen elemeknek van inverze?

Megoldás. $(\mathbb{R}, \triangle)$ zéruselemes kommutatív monoid

Tétel

Monoidban minden elemnek legfeljebb egy inverze van.

Bizonyítás. Lásd a táblán.

Definíció

Legyen $*$ és $\circ$ két tetszőleges kétváltozós művelet az A nemüres halmazon. A $\circ$ művelet disztributív a $*$ műveletre, ha $\forall a, b, c \in A$ elemekre

$$\begin{aligned} (a * b) \circ c &= (a \circ c) * (b \circ c) \\ c \circ (a * b) &= (c \circ a) * (c \circ b) \end{aligned}$$

Definíció

Legyen $*$ és $\circ$ két tetszőleges kétváltozós művelet az A nemüres halmazon. A $\circ$ művelet disztributív a $*$ műveletre, ha $\forall a, b, c \in A$ elemekre

$$\begin{aligned}(a * b) \circ c &= (a \circ c) * (b \circ c)\\ c \circ (a * b) &= (c \circ a) * (c \circ b)\end{aligned}$$

Példák.

Gyűrűk, testek

Definíció

Legyen $*$ és $\circ$ két tetszőleges kétváltozós művelet az A nemüres halmazon. A $\circ$ művelet disztributív a $*$ műveletre, ha $\forall a, b, c \in A$ elemekre

$$\begin{aligned} (a * b) \circ c &= (a \circ c) * (b \circ c) \\ c \circ (a * b) &= (c \circ a) * (c \circ b) \end{aligned}$$

Példák. A $\mathbb{Z}_n, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{N}$ halmazokon a $\cdot$ disztributív az $+$-ra nézve. Az $\{i, h\}$ logikai értékek halmazán az $\wedge$ disztributív a $\vee$ műveletre.

Gyűrű

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

1. $(A; +)$ Abel-csoport,
2. $(A; \cdot)$ félcsoport,
3. $\cdot$ disztributív $+$-ra.

Gyűrűk, testek

Gyűrű

Az $(A;+,\cdot)$ algebra gyűrű, ha

1. $(A;+)$ Abel-csoport,
2. $(A;\cdot)$ félcsoport,
3. $\cdot$ disztributív $+$-ra.

Példák

- $(\mathbb{Z}_n;+,\cdot)$
- $(\mathbb{Z};+,\cdot)$
- $(\overline{\mathbb{M}}_n;+,\cdot)$

Gyűrűk, testek

Gyűrű

Az $(A;+,\cdot)$ algebra gyűrű, ha

1. $(A;+)$ Abel-csoport,
2. $(A;\cdot)$ félcsoport,
3. $\cdot$ disztributív $+$-ra.

Test

Az $(A;+,\cdot)$ algebra gyűrű, ha

1. $(A;+)$ Abel-csoport,
2. $(A\setminus\{0\};\cdot)$ Abel-csoport,
3. $\cdot$ disztributív $+$-ra.

Példák

- $(\mathbb{Z}_n;+,\cdot)$
- $(\mathbb{Z};+,\cdot)$
- $(\overline{\mathbb{M}}_n;+,\cdot)$

Gyűrűk, testek

Gyűrű

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

1. $(A; +)$ Abel-csoport,
2. $(A; \cdot)$ félcsoport,
3. $\cdot$ disztributív $+$-ra.

Példák

- $(\mathbb{Z}_n; +, \cdot)$
- $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$
- $(\overline{\mathbb{M}}_n; +, \cdot)$

Test

Az $(A; +, \cdot)$ algebra gyűrű, ha

1. $(A; +)$ Abel-csoport,
2. $(A \setminus \{0\}; \cdot)$ Abel-csoport,
3. $\cdot$ disztributív $+$-ra.

Példák

- $(\mathbb{Z}_p; +, \cdot)$
- $(\mathbb{Q}; +, \cdot)$
- $(\mathbb{R}; +, \cdot)$
- $(\mathbb{C}; +, \cdot)$

Feladat

Számoljunk a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

(a) $\overline{12}+\overline{16}$; (b) $\overline{3}\cdot\overline{12}$; (c) $\frac{\overline{3}}{\overline{5}}$; (d) $\overline{9}^{38}$

Feladat

Számoljunk a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

(a) $\overline{12}+\overline{16}$; (b) $\overline{3}\cdot\overline{12}$; (c) $\frac{\overline{3}}{\overline{5}}$; (d) $\overline{9}^{38}$

Megoldás.

(a) $\overline{9}$; (b) $\overline{17}$; (c) $\overline{12}$; (d) $\overline{5}$

Feladat

Számoljunk a $\mathbb{Z}_{19}$ testben.

(a) $\overline{12}+\overline{16}$; (b) $\overline{3}\cdot\overline{12}$; (c) $\frac{\overline{3}}{\overline{5}}$; (d) $\overline{9}^{38}$

Megoldás.

(a) $\overline{9}$; (b) $\overline{17}$; (c) $\overline{12}$; (d) $\overline{5}$

Tétel

$(\mathbb{Z}_n;+,\cdot)$ test $\iff$ n prím