

## 4. feladatsor – Absztrakt algebra MEGOLDÁSOK

### 4.1. Feladat.

- (a) igen, igen; (b) nem, nem; (c) igen, nem; (d) igen, igen; (e) igen; (f) igen.

### 4.2. Feladat. .

- (a) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 0, egységeleme: 1, az invertálható elemek halmaza:  $\{1, -1\}$ ;  
(b) A grupoid kommutatív, zéruseleme: 1, egységeleme:  $-1$ , az invertálható elemek halmaza:  $\{-1\}$ ;  
(c) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza:  $\emptyset$ ;  
(d) A grupoid nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza:  $\emptyset$ .

### 4.3. Feladat. .

- (a) A grupoid nem kommutatív, nem kancellatív, zéruselem nincs, a  $b$  elem egységelem, a  $b$  és  $c$  elemeknek van inverze:  $b^{-1} = b$ ,  $c^{-1} = c$ ;  
(b) A grupoid nem kommutatív, nem kancellatív, zéruselem nincs, az  $a$  elem egységelem, az  $a$ ,  $b$  és  $c$  elemeknek van inverze:  $a^{-1} = a$ ,  $b^{-1} = c$ ,  $c^{-1} = b$ .

### 4.4. Feladat. .

- (a) A grupoid asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza:  $\emptyset$ , félcsoport;  
(b) A grupoid nem asszociatív, nem kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza:  $\emptyset$ ;  
(c) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 3, egységeleme: 4, az invertálható elemek halmaza:  $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ . Monoid és  $(\mathbb{R} \setminus \{3\}; \square)$  csoport;  
(d) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme: 2, egységeleme: 3, az invertálható elemek halmaza:  $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ . Monoid és  $(\mathbb{R} \setminus \{2\}; \triangle)$  csoport;  
(e) A grupoid asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme nincs, az invertálható elemek halmaza:  $\emptyset$ , félcsoport;  
(f) A grupoid nem asszociatív, kommutatív, zéruseleme nincs, egységeleme: 0, az invertálható elemek halmaza:  $\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}$ .

### 4.5. Feladat.

- (a) félcsoport; (b) monoid; (c) Abel-csoport; (d) Abel-csoport;  
(e) Abel-csoport; (f) monoid; (g) monoid; (h) Abel-csoport;  
(i) monoid; (j) monoid; (k) monoid; (l) Abel-csoport;  
(m) Abel-csoport; (n) monoid.

### 4.6. Feladat. .

- (a) érvényes;  
(b) nem érvényes;  
(c) nem érvényes;  
(d) érvényes.

**4.7. Feladat.**

- (a) nem gyűrű; (b) gyűrű; (c) test; (d) test; (e) gyűrű; (f) test;  
 (g) gyűrű; (h) gyűrű.

**4.8. Feladat.**

- (a)  $\bar{4}$ ; (b)  $\bar{5}$ ; (c)  $\bar{4}$ ; (d)  $\bar{2}$ ; (e)  $\bar{14}$ .

**4.9. Feladat.**

- (a)  $\bar{2}$ ; (b)  $\bar{9}$ ; (c)  $\bar{11}$ ; (d) nem végezhető el; (e)  $\bar{4}$ .

**4.10. Feladat.**

- (a)  $\{a\}$ ; (b)  $\{a, b, c\}$ ; (c)  $\{a, b, c\}$ ; (d)  $\{d\}$ ; (e)  $\{a, b, c, d\}$ .

$T$  egy minimális generátorrendszere:  $\{b, d\}$

**4.11. Feladat.**

- (a)  $\{\bar{0}, \bar{2}\}$ ; (b)  $\{\bar{0}, \bar{1}, \bar{2}, \bar{3}\}$ ; (c)  $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}\}$ ; (d)  $\{\bar{0}, \bar{2}, \bar{4}, \bar{6}, \bar{8}, \bar{10}\}$ ;  
 (e)  $(\mathbb{Z}; +)$ ; (f)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ .

**4.12. Feladat.**

- (a)  $o(\bar{2}) = 2$ ; (b)  $o(\bar{3}) = 4$ ; (c)  $o(\bar{2}) = 3$ ; (d)  $o(i) = 4$ .

**4.13. Feladat. .**

- (a)  $\bar{1} + H = \{\bar{1}, \bar{4}\}$ ,  $\bar{2}$  nem eleme;  
 (b)  $2 + H = \{3k + 2 : k \in \mathbb{Z}\}$ ,  $-4 = 3(-2) + 2$  eleme;  
 (c)  $(3, 4) + H = \{(x + 3, x + 4) : x \in \mathbb{R}\}$ ,  $(-8, -7) = (-11 + 3, -11 + 4)$  eleme;  
 (d)  $(2, -1) + H = \{(5x + 2, -2x - 1) : x \in \mathbb{Z}\}$ ,  $(17, -5)$  nem eleme.

**4.14. Feladat.  $\mathbf{A} \cong \mathbf{C} \cong \mathbf{D}$ .**

- $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{C}$ ;  $0 \mapsto q, 1 \mapsto r, 2 \mapsto p$ .  
 $\mathbf{C} \rightarrow \mathbf{D}$ ;  $p \mapsto 0, q \mapsto 1, r \mapsto -1$ .  
 $\mathbf{A} \rightarrow \mathbf{D}$ ;  $0 \mapsto 1, 1 \mapsto -1, 2 \mapsto 0$ .

**4.15. Feladat. .**

- (a) igaz,  
 (b) hamis,  
 (c) hamis,  
 (d) igaz.

**4.16. Feladat. .**

- (a) nem,  
 (b) igen,  
 (c) nem,  
 (d) igen,  
 (e) igen.