

FELADATOK A „RELÁCIÓK, GRÁFOK” TÉMAKÖRHÖZ

2. rész

5.1. Feladat. Öt város között telefon-összeköttetést akarunk létesíteni. Ennek érdekében bizonyos városok telefonközpontjai között kábelt fektetünk.

- (a) Legalább hány kábelt kell fektetni, hogy bármelyik városból bármelyik másikba lehessen telefonálni?
- (b) Legalább hány kábelt kell fektetni akkor, ha biztonsági okokból azt akarjuk, hogy bármely két város között legalább két független (közös kábel nélküli) vonalon is lehessen telefonálni?

5.2. Feladat. Rajzoljuk meg a családfánkat ötödízigen visszamenőleg, és döntsük el, hogy dédapáink nagyapjai és nagyapáink dédapjai ugyanazon személyek-e. (Feltesszük, hogy felmenő ágon legalább ötödízigen nem volt rokonházasság.)

5.3. Feladat. Egy sakk csapatversenyen több csapat vett részt. (Minden játékos pontosan egyszer játszik minden, vele nem azonos csapatban levő játékosal.) A verseny végén a sakkozónak „ünnepi ebédet” adnak. A szakácsnak elfelejtették leadni a csapatok létszámát. A szakács mindössze annyit tud, hogy a legnagyobb létszámú csapatban 12 versenyző van, és hogy a verseny során 42 sakkozó szerzett pontot. Hány ebédet kell főznie a szakácsnak, hogy biztosan jusson minden sakkozónak?

5.4. Feladat. Egy 5 tagú társaságban lehet-e mindenkinek pontosan 3 ismerőse? (Az ismeretségek kölcsönösek.)

5.5. Feladat. 8 csapat körmérkőzéses versenye során előfordulhat-e, hogy az egyes csapatok eddig rendre 1, 2, 2, 2, 4, 5, 7, 7 mérkőzést játszottak?

5.6. Feladat. Egy klubesten 7 fiú és 7 lány vett részt. Egy játék során mindenki felírta egy cédulára, hogy a klubesten hány partnerrel táncolt. A felírt számok a következők voltak: 3, 3, 4, 4, 2, 1, 4, 5, 6, 2, 7, 4, 0, 6. Mutassa meg, hogy valaki tévedett.

5.7. Feladat. Hány olyan 5-pontú, egyszerű gráf van, melyben a pontok fokszámai 1, 2, 2, 2, 3? Olda meg a feladatot úgy is, hogy a pontokat megszámozza, és úgy is, hogy nem.

5.8. Feladat. Rajzoljon olyan 5-pontú, egyszerű gráfot, amelynek két harmadfokú és két negyedfokú pontja van. Hány ilyen gráf van, ha

- (a) a pontokat nem számozzuk meg;
- (b) a pontokat megszámozzuk?

Határozzuk meg az ilyen gráfok éleinek a számát.

5.9. Feladat. Egy 6-pontú, egyszerű gráf pontjainak fokszámai: 2, 2, 3, 3, 5, 5. Hány ilyen gráf van, ha a pontokat megszámozza, és hány van akkor, ha nem? Számítsa ki a gráfok éleinek a számát.

5.10. Feladat. Igazolja, hogy bármely gráfban a páratlan fokú pontok száma páros.

5.11. Feladat. Igazolja, hogy ha egy gráf pontjainak a száma páratlan, akkor van páros fokú pontja.

5.12. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha egy n -pontú ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) egyszerű gráfban a 0 kivételével minden lehetséges fokszám előfordul, akkor a gráfban két $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ -fokú pont van.

5.13. Feladat. Egy erdő 5 fájában összesen 16 él van. Hány pontja van az erdőnek?

5.14. Feladat. Hány különböző, 5-pontú fa van, ha a pontjait nem különböztetjük meg?

5.15. Feladat. Egy 20-pontú fának 18 elsőfokú pontja van.

- (a) Hányadfokú lehet a további két pont?

- (b) Hány élt tartalmaz a leghosszabb útja?
 (c) Hány ilyen fa van, ha a pontokat nem különböztetjük meg?

5.16. Feladat. Tetszőleges T fára és rögzített $v \in V(T)$ pontjára vezessük be a következő jelölést: tetszőleges $u \in V(T)$ esetén jelölje $\delta_{T,v}(u)$ az uv út hosszát. Legyen \mathcal{T}_n az n -pontú fák halmaza az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazon. Határozza meg azokat a $T \in \mathcal{T}_n$ fákat és $v \in V(T)$ pontokat, amelyekre a

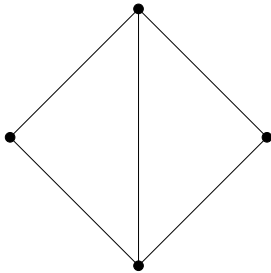
$$\sum_{u \in V(T)} \delta_{T,v}(u)$$

összeg minimális, illetve maximális.

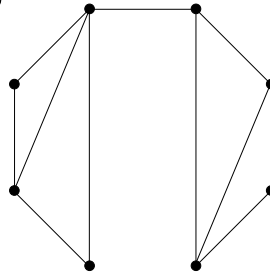
5.17. Feladat. Adjon meg

- (a) lefoglaló pontthalmazt;
 (b) maximális párosítást az alábbi gráfokban.

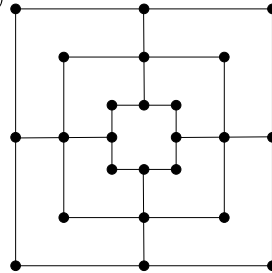
(A)



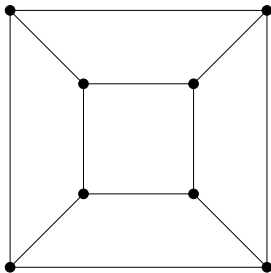
(B)



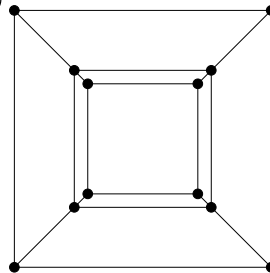
(C)



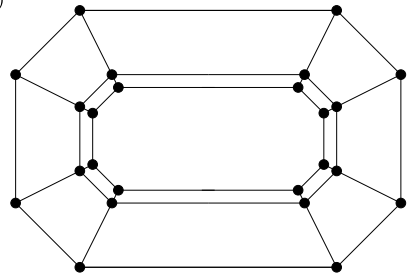
(D)



(E)



(F)



5.18. Feladat. Határozza meg $\nu(G)$ és $\tau(G)$ értékét az előző feladatbeli gráfokra.

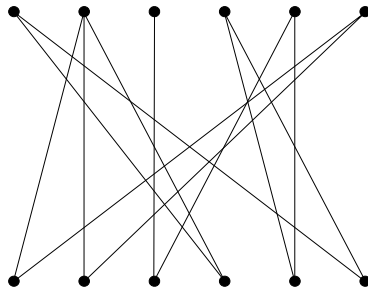
5.19. Feladat. Adjon meg olyan gráfokat, amelyekben pontosan egy teljes párosítás van.

5.20. Feladat. Legalább hány darab élt kell elhagyni az n -pontú teljes gráfból, hogy páros gráfot kapjunk?

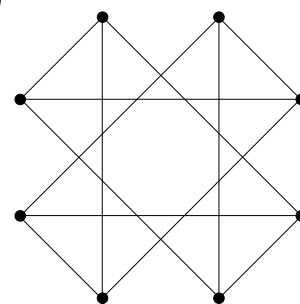
5.21. Feladat. Egy n -pontú páros gráfban behúzzunk egy új élt. Legfeljebb hány darab 3-hosszúságú kör keletkezik?

5.22. Feladat. Keressen maximális párosítást az alábbi gráfokban a magyar módszer segítségével.

(A)



(B)



5.23. Feladat. Legyenek m és n természetes számok, $V_{m,n} = \{(a, b) \mid a, b \in \mathbb{Z}, 1 \leq a \leq m, 1 \leq b \leq n\}$, $E_{m,n} = \{((a, b), (c, d)) \in V \times V \mid |a - c| + |b - d| = 1\}$, valamint $G_{m,n} = (V_{m,n}, E_{m,n})$. Mutassa meg, hogy a $G_{m,n}$ gráf páros. Keressen benne maximális elemszámú párosítást.