Kombinatorika

(2017. február 8.)

Bogya Norbert, Kátai-Urbán Kamilla

1. Kombinatorikai alapfeladatok

A kombinatorikai alapfeladatok lényege az, hogy bizonyos elemeket sorba rendezünk, vagy néhányat kiválasztunk belőlük, és esetleg utána rendezzük sorba. Minden ilyen feladatnál fel lehet tenni a következő kérdéseket.

- Sorba kell-e rendezni az összes elemet? (Permutáció.)
- Ki kell-e választani közülük valamennyit? (Variáció vagy kombináció.)
- Az elemek különbözőek, vagy azonosak is vannak közöttük? (Ismétlés nélküli vagy ismétléses.)
- A kiválasztás után számít a sorrend vagy nem? (Variáció vagy kombináció.)

A következőkben a fenti felsorolás zárójelben lévő fogalmait fogjuk pontosan definiálni.

1.1. Variáció

1. Definíció. Egy n elemű halmaz elemeiből képezhető k-tagú ismétlődést megengedő sorozatot az n elem k-tagú ismétléses variációjának nevezzük.

2. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak az $1, 8, 7, 1, 10$ sorozat egy 5-tagú ismétléses variációja.

3. Megjegyzés. Az n elem k-tagú ismétléses variációját egy k-elemű halmaznak egy n-elemű halmazba való leképezésének is tekinthetjük. Az előző példánál $k = 5$, tehát az $a_1, \ldots, a_5$ elemekhez hozzárendeljük a H elemeit úgy, hogy leképezést (φ) kapjunk, azaz minden elemnek pontosan egy képe van: $a_1\varphi = 1$, $a_2\varphi = 8$, $a_3\varphi = 7$, $a_4\varphi = 1$, $a_5\varphi = 10$.

4. Definíció. Egy n elemű halmaz elemiből képezhető k-tagú ismétlés nélküli sorozatot az n elem k-tagú ismétlés nélküli variációjának nevezzük. Ilyen csak akkor létezik, ha $k \leq n$.

5. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $3, 10, 7, 1, 2$ sorozat egy 5-tagú ismétlés nélküli variációja.

6. Megjegyzés. Az n elem k-tagú ismétlés nélküli variációját egy k-elemű halmaznak egy n-elemű halmazba való injektív leképezésének is tekinthetjük. Az előző példánál $k = 5$, tehát az $a_1, \ldots, a_5$ elemekhez hozzárendeljük a H elemeit úgy, hogy injektív leképezést (ψ) kapjunk, azaz minden elemnek pontosan egy képe van, és különböző elemeknek különböző a képe: $a_1\psi = 3$, $a_2\psi = 10$, $a_3\psi = 7$, $a_4\psi = 1$, $a_5\psi = 2$.

Felmerül a kérdés, hogy hány különböző variációja és ismétléses variációja van egy n elemű halmaznak. Azaz n különböző elemből kiválasztva k darabot, majd ezeket sorba rendezve hány különböző sorozatot kaphatunk. Erre ad választ a következő két tétel.

7. Tétel. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$. Ekkor n elem k-tagú ismétléses variációinak száma n^k.

8. Tétel. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. Ekkor n elem k-tagú ismétlés nélküli variációinak száma $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

9. Példa. Hányféleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt? (A magyar totón 14 meccs végeredményére lehet fogadni, és mindegyik meccs kimenetele háromféle lehet: 1, 0 vagy x.) A $\{0, 1, x\}$ halmaz elemeiből kell képeznünk egy $13 + 1$ hosszú sorozatot. Nyilván két meccs eredménye lehet ugyanaz is, ezért ismétléses variációt kapunk. Mivel $n = 3$ és $k = 14$, így 3^{14}-féleképpen tölthetünk ki egy totószelvényt.

10. Példa. Egy tanácsban 10 ember ül, és ki akarják maguk között sorsolni, hogy ki legyen az igazgató és az igazgató helyettese. Hányféleképpen végződhet a sorsolás? Ismétlés nélküli variációról van szó $n = 10$ és $k = 2$ paraméterekkel. (A sorrend valóban számít a kisorsoltak között, mert nem mindegy, ki lesz az igazgató, és ki lesz a helyettese.) Tehát a sorsolás $10 \cdot 9$, azaz 90-féleképpen végződhet.

11. Példa. Hány különböző négybetűs szó képezhető a „SAJTÓ” szó betűiből? Az 5 különböző betű közül kell kiválasztani 4-et (a feladat nem mondja, hogy nem ismétlődhetnek), és ezeket kell sorbarendezni, tehát ismétléses variációt kell alkalmazni $n = 5$ és $k = 4$ paraméterekkel, így 5^4 szó képezhető.

12. Példa. Egy kerékpárlakaton egy 4 számjegyből álló kombináció nyitja és zárja a zárszerkezetet. Elfelejtettük ezt a kombinációt. Legrosszabb esetben hány kombinációt kell végigpróbálni? Ismétléses variáció $n = 10$ és $k = 4$ paraméterekkel, mivel a 10 különböző számjegyből kell 4-et kiválasztani, és azokból sorozatot képezni. (A lakat az ismétlődő számjegyeket nem tiltja.) Így 10^4 kombináció lehetséges.

13. Példa. Egy bajnokságon 8 csapat indult. Hányféle sorrend alakulhat ki a dobogón, ha sehol sem lehet holtverseny, és minden csapat csak egy darab helyezést érhet el. Ismétlés nélküli variációt kell alkalmazni, mert a 8 csapatból kell kiválasztani 3-at, őket sorba rendezni, mert a dobogón számít a sorrend, és az ismétlést a feladat szövege tiltja. Összesen $8 \cdot 7 \cdot 6$ sorrend lehetséges.

1.2. Permutáció

14. Definíció. Adott n különböző elem esetén azoknak egy sorba rendezését az n elem (ismétlés nélküli) permutációjának nevezzük.

15. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $8, 1, 2, 7, 10, 3$ sorozat egy permutációja.

16. Megjegyzés. Középiskolában általában a permutációkat elkülönítve tanítják a variációktól, pedig észre kell vennünk, hogy az ismétlés nélküli permutáció egy olyan variáció, ahol egy n elemű halmazból n elemet választunk ki, és ezeket rakjuk sorba. Tehát olyan, mint az ismétlés nélküli variáció $k = n$ paraméterekkel.

A permutációknak is létezik ismétléses változata, azonban ennek definiálásához vissza kell emlékeznünk a rendszer fogalmára. A rendszer a halmazhoz hasonló fogalom, annyi a különbség, hogy a rendszerben egy elemet többször is felsorolhatunk. Például az $1, 1, 3, 4, 6, 6, 7$ egy 7-elemű rendszer. A rendszerek elemeit szándékosan nem tesszük kapcsos zárójelbe, mert azt halmazok esetén használjuk, és a rendszer nem halmaz.

17. Definíció. Egy n elemű rendszer elemeinek sorozatba rendezését az n elem ismétléses permutációjának nevezzük.

18. Példa. A $3, 3, 4, 4, 4, 5, 5$ rendszernek a $4, 3, 5, 4, 5, 3, 4$ sorozat egy ismétléses permutációja.

19. Tétel. Legyen $n \in \mathbb{N}_0$. Ekkor n elem ismétlés nélküli permutációinak száma $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 = n!$, megállapodás szerint $0! = 1! = 1$.

20. Tétel. Tekintsünk egy n elemű rendszert, melyben r különböző elem van, és minden különböző elemből $k_1, k_2, \ldots, k_r$ darab van a rendszerben. Tehát $n = k_1 + k_2 + \ldots + k_r$. Ekkor az n elem ismétléses permutációinak száma

$$\frac{n!}{k_1! \cdot \ldots \cdot k_r!}.$$

A k_i számokat az i-edik elem multiplicitásának nevezzük, ez mutatja, hogy az i-edik elemnek hány példánya van a rendszerben.

21. Példa. Hányféleképpen tudunk 6 különböző könyvet sorba rendezni a könyvespolcon? A válasz $6! = 720$.

22. Példa. Hány különböző 5-betűs szó készíthető az „ABLAK” szó betűiből, mindegyiket felhasználva? Azaz 5 elemet kell sorba rendezni, ám az elemek között vannak egyformák. Ekkor ismétléses permutációt használunk, a válasz $\frac{5!}{2!} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

23. Példa. Hányféleképpen lehet egy 52 lapos póker-paklit megkeverni? A válasz $52!$, ami egy 68 jegyű szám.

24. Példa. Hányféle különböző sorrendje van a „MATEMATIKA" szó betűinek? Azaz 10 elemet kell sorba rendezni, ám az elemek között vannak egyformák. Ekkor ismétléses permutációt használunk, a válasz $\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!} = 151200$.

25. Példa. Hány 10 jegyű szám készíthető 6 darab kettes, 2 darab hetes és 2 darab hatos számjegyből, ha mindegyiket fel akarjuk használni? Ismétléses permutációról van szó, ahol a rendszer 10 elemű, azaz $n = 10$. Továbbá három darab különböző elem van a rendszerben: $2, 7, 6$. Az ezekhez tartozó multiplicitások: $k_2 = 6$, $k_7 = 2$ és $k_6 = 2$. Tehát a válasz a kérdésre: $\frac{10!}{6!\cdot 2!\cdot 2!}$.

1.3. Kombináció

26. Definíció. Egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazait az n elem k-tagú ismétlés nélküli kombinációinak nevezzük.

27. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $\{2, 7, 8\}$ halmaz egy 3-tagú kombinációja.

Vegyük észre, hogy egy n-elemű halmaz k-elemű részhalmazának megadása azt jelenti, hogy n elemből kiválasztunk k darabot, mivel részhalmazról van szó, ezen kiválasztásnál az elemek sorrendje nem számít.

28. Definíció. Egy n elemű halmaz k elemű részrendszereit az n elem k-tagú ismétléses kombinációinak nevezzük.

29. Példa. A $H = \{1, 2, 3, 7, 8, 10\}$ halmaznak a $3, 7, 3, 1, 10, 1, 3$ rendszer egy 7-tagú ismétléses kombinációja.

30. Megjegyzés. Az előző definícióban a részrendszer képzése azt jelenti, hogy egy elemet többször is kiválaszthatunk a halmazból. Az elemek sorrendje most sem számít, mivel a rendszerben nem számít az elemek sorrendje.

31. Tétel. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$ és $k \leq n$. Ekkor n elem k-adosztályú ismétlés nélküli kombinációinak száma

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1}.$$

32. Definíció. Az előző tételben szereplő $\binom{n}{k}$ kifejezést binomiális együtthatónak nevezzük.

33. Tétel. Legyen $n, k \in \mathbb{N}$, ekkor n elem k-adosztályú ismétléses kombinációinak száma

$$\binom{n+k-1}{k}.$$

34. Példa. Hányféleképpen tudjuk kitölteni az ötöslottót? (Magyarországon 90 számból 5-öt kell megtippelni.) Mivel a sorsolás után a megjelölt számok sorrendje teljesen irreleváns, így a 90 számból 5 darab kiválasztásánál a sorrend nem számít. Tehát $\binom{90}{5}$-féleképpen tölthető ki egy ötöslottószelvény.

35. Példa. Hányféleképpen osztható szét 100000 forintnyi jutalom 3 dolgozó között, ha mindenki csak 10000-rel osztható összeget kaphat? (Természetesen az is megengedett, hogy valaki nem kap semmit.) Ismétléses kombinációról van szó, mert minden tízezresre ki kell választani egy embert a három közül. Tehát 3-ból választunk 10 helyre, és egy-egy embert nyilván több tízezreshez is ki lehet választanunk, így a megoldás $\binom{3+10-1}{10} = \binom{12}{10}$.

36. Példa. Hány olyan dominó van, amelynek mindkét felén a pontok száma 0-tól 6-ig terjed? Így 7 elemből kell kiválasztani 2-t, de egy elemet mindkét oldalra is kiválaszthatunk, azaz ismétléses kombinációt kell használni. Így $\binom{7+2-1}{2} = \binom{8}{2} = 28$ dominó van, ami a feladat feltételének eleget tesz.

2. Binomiális tétel

Emlékezzünk vissza a középiskolában is tanult

$$\begin{aligned}(a+b)^2 &= a^2+2ab+b^2 \text{ és}\\ (a+b)^3 &= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3\end{aligned}$$

azonosságokra. Mint ahogy az a következő tételből látható lesz, ez a 2-es és 3-as kitevő általánosítható tetszőleges természetes kitevőre.

37. Tétel (Binomiális tétel). Ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá a és b valós számok, akkor

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n + \binom{n}{1}a^{n-1}b + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n-1}ab^{n-1} + \binom{n}{n}b^n,$$

vagy rövidebben

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k.$$

Azért, hogy lássuk, a binomiális tétel hogyan kapcsolódik a kombinatorikai problémákhoz, vizsgáljuk meg a jobboldali összegben fellépő általános $\binom{n}{k}a^{n-k}b^k$ tagot. Képzeljük el, hogy az n darab $(a+b)$ tényezőt elkezdjük összeszorozni egymással. Azokat a tagokat számoljuk, ahol k darab b-t, és $n-k$ darab a-t szorzunk össze. Hányféleképpen tehettük ezt meg? Pontosan annyiféleképpen, ahányféleképpen az n darab $(a+b)$ tényezőből ki tudjuk választani az k darab b-t. Ez pedig pontosan $\binom{n}{k}$.

A binomiális együtthatókból felépíthető Pascal-háromszögből azonnal látszódnak a binomiális együtthatók legfontosabb tulajdonságai. Az alábbi ábrán látható a Pascal-háromszög első néhány sora, melyben az $\binom{n}{k}$ értékek vannak feltüntetve.

$n=0,\ k=0$	$\binom{0}{0}$	1
$n=1,\ k=0,1$	$\binom{1}{0}\ \binom{1}{1}$	1 1
$n=2,\ k=0,1,2$	$\binom{2}{0}\ \binom{2}{1}\ \binom{2}{2}$	1 2 1
$n=3,\ k=0,1,2,3$	$\binom{3}{0}\ \binom{3}{1}\ \binom{3}{2}\ \binom{3}{3}$	1 3 3 1
$n=4,\ k=0,1,2,3,4$	$\binom{4}{0}\ \binom{4}{1}\ \binom{4}{2}\ \binom{4}{3}\ \binom{4}{4}$	1 4 6 4 1
$n=5,\ k=0,1,2,3,4,5$	$\binom{5}{0}\ \binom{5}{1}\ \binom{5}{2}\ \binom{5}{3}\ \binom{5}{4}\ \binom{5}{5}$	1 5 10 10 5 1

A binomiális együttható és a Pascal-háromszög legfontosabb tulajdonságait az alábbi tétel foglalja össze.

38. Tétel. Legyen $k, n \in \mathbb{N}_0$ és $k \le n$. Ekkor érvényesek az alábbi összefüggések.

(1) $\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$. (A háromszög két oldalán 1-esek állnak.)
(2) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$. (A háromszög tengelyesen szimmetrikus.)
(3) Ha $0 < k < n$, akkor $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$. (A háromszögben bármelyik elem a felette lévő két elem összege, feltéve, hogy van felette két elem.)
(4) Bármely $n \in \mathbb{N}_0$-ra $\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$. (A Pascal-háromszögben az k-adik sor összege 2^{k-1}.)

Természetesen adódik a kérdés, hogy a kitevő általánosítása után, tudjuk-e tovább általánosítani a problémát, mondjuk a változók számát tekintve. A választ az alábbi tétel adja meg.

39. Tétel (Polinomiális tétel). Ha $n \in \mathbb{N}$, továbbá $a_1, \ldots, a_k$ valós számok, akkor

$$(a_1+\ldots+a_k)^n = \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k \in \mathbb{N}_0\\ i_1+\ldots+i_k=n}} \frac{n!}{i_1!\cdot\ldots\cdot i_k!}\cdot a_1^{i_1}\cdot a_2^{i_2}\cdot\ldots\cdot a_k^{i_k}.$$

3. Szitaformula

Könnyen megfigyelhető a halmazokra vonatkozó alábbi állítás.

40. Tétel. Ha A, B véges halmazok, akkor $|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$.

A fenti állítás szemléletesen könnyen igazolható, ugyanis az $A \cup B$ halmazban azok az elemek vannak, amelyek legalább az egyikben benne vannak. Így megszámoljuk azokat, amelyek benne vannak A-ban, illetve külön, amik benne vannak B-ben, de mivel a metszetüket kétszer számoltuk, így a metszet elemszámát egyszer le kell vonni, hogy minden elemet csak egyszer számoljunk.

Természetesen a fenti állítás kiterjeszthető több halmazra is.

41. Tétel. Legyenek $A_1, \dots A_n$ véges halmazok. Ekkor

$$|A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r-1} \sum_{\substack{\{i_1, \ldots i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ |\{i_1, \ldots, i_r\}| = r}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

A fenti tétel első ránézésre egyáltalán nem tűnik kényelmesnek. Segíthet, ha megértjük, mi történik a képletben. Van n darab véges halmazunk, és keressük az uniójuk elemszámát. Az $r = 1$ esetén összeadjuk a halmazok elemszámát. Így néhány elemet kétszer számoltunk ezért le kell vonnunk belőle bizonyos elemszámokat, például $r = 2$ esetén a „kettős metszetek" elemszámát. Ezután hozzáadjuk a „hármas metszetek" elemszámát, levonjuk a „négyes metszetek" elemszámát, és ezt folytatjuk, míg el nem jutunk az $r = n$ esethez, ami az összes halmaznak a metszete. A fenti tétel következménye a szitaformula.

42. Tétel (Szitaformula). Legyenek $A_1, \dots A_n$ halmazok a véges U univerzum részhalmazai. Ekkor

$$\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |U| + \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r} \sum_{\substack{\{i_1, \ldots i_r\} \subseteq \{1, \ldots, n\} \\ |\{i_1, \ldots, i_r\}| = r}} |A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_r}|.$$

A szitaformula a 41. Tétel egyenes következménye, ugyanis $\left|\overline{A_1 \cup \ldots \cup A_n}\right| = |U| - |A_1 \cup \ldots \cup A_n|$.

43. Példa. A Szegedi Tudományegyetem matematika tanszékcsoportja 100 matematika, 200 biológia és 400 informatika szakos hallgatót oktat. Akik egyszerre matematika és biológia szakosak, azoknak a száma 12, a matematika és informatika szakosoké 44, illetve a biológia-informatika szakos hallgatók száma 6. Négy fő végzi egyszerre mind a három szakot. Hány hallgatót oktat a matematika tanszékcsoport?

Jelölje I, B, M rendre az informatika, biológia és matematika szakos hallgatók halmazát. Ekkor a 41. Tétel szerint

$$\begin{aligned} |I \cup B \cup M| &= |I| + |B| + |M| - |I \cap B| - |I \cap M| - |B \cap M| + |I \cap B \cap M| \\ &= 400 + 200 + 100 - 6 - 44 - 12 + 4 = 642. \end{aligned}$$