

FELADATOK A „LOGIKA” TÉMAKÖRHÖZ

8.1. Feladat. Logikailag helyesek-e az alábbi következtetések?

- (a) $A \rightarrow (B \wedge C), (\neg B) \vee (\neg C) \models \neg A$;
 (b) $(A \wedge B) \rightarrow (C \vee (\neg D)), D \rightarrow C \models A$;
 (c) $(\neg A) \vee (\neg B), ((\neg C) \vee (\neg D)) \rightarrow B, A \rightarrow (E \wedge C) \models A \rightarrow D$;
 (d) $A \rightarrow (B \vee C), E \rightarrow (\neg B), D \leftrightarrow (E \wedge (\neg C)), D \vee F \models A \rightarrow F$.
 (e) *Pénzem aranyba fektetem, vagy világgörüli útra indulok. Ha világgörüli útra indulok, akkor ha megnézem a riói karnevált, nem utazom Dániába. Ha megnézem a riói karnevált, akkor világgörüli útra indulok, és még Dániába is elutazom. Eladom a lakásom, és elutazom Dániába. Tehát, ha eladom a lakásom, akkor a pénzem aranyba fektetem.*
 (f) *Ha szerencsém lesz, vagy segít a barátom, akkor sikerül a vizsgám. Ha csak akkor segít a barátom, ha meghívom ebédelni, akkor rossz hangulatom lesz. Ha meghívom ebédelni a barátomat, akkor nem sikerül a vizsgám, vagy nyáron külföldre utazom. Meghívom ebédelni a barátomat, vagy nyáron külföldre utazom. Tehát, ha szerencsém lesz, akkor nyáron külföldre utazom.*

8.2. Feladat. Kielégíthetők-e az alábbi formulahalmazok?

- (a) $\{A \wedge B, (A \wedge C) \rightarrow (\neg B), B \rightarrow C\}$; (b) $\{A \wedge B, ((\neg A) \vee C) \rightarrow (\neg B), B \rightarrow C\}$;
 (c) $\{A \vee B, B \rightarrow C, A \rightarrow (B \vee (\neg C))\}$; (d) $\{A \rightarrow (B \rightarrow C), B \wedge (A \leftrightarrow (\neg C))\}$.

8.3. Feladat. Legyenek F_1, \dots, F_n és G tetszőleges ítéletkalkulusbeli formulák. Megállapítható-e, hogy $F_1, \dots, F_n \models G$ teljesül vagy nem teljesül, ha csak annyit tudunk, hogy $\{F_1, \dots, F_n\}$ kielégíthető?

8.4. Feladat. Igaz-e, hogy az alábbi formulasorozat a $D \rightarrow C$ formula levezetése (a tautológiagyűjtemény alapján) az $A \rightarrow (B \rightarrow C)$, $D \rightarrow A$, B premisszákból? Igenlő válasz esetén jelezze a szokásos módon a lépéseket, nemleges válasz esetén pedig keresse meg a meg nem engedett lépést.

- (1) $A \rightarrow (B \rightarrow C)$
- (2) $D \rightarrow A$
- (3) $D \rightarrow (B \rightarrow C)$
- (4) $(D \wedge B) \rightarrow C$
- (5) $(B \wedge D) \rightarrow (D \wedge B)$
- (6) $(B \wedge D) \rightarrow C$
- (7) $B \rightarrow (D \rightarrow C)$
- (8) B
- (9) $D \rightarrow C$

8.5. Feladat. Igazolja levezetéssel az

$$E \vee F, E \rightarrow (\neg G), (\neg F) \vee H \models G \rightarrow H$$

következtetés helyességét.

8.6. Feladat. Hány részformulája, részkifejezése és szabad változója van a

$$(\forall x)P(f(x, a)) \rightarrow (\exists y)(P(f(y, x)) \wedge Q(x))$$

formulának, ahol Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans.

8.7. Feladat. Jelölje $P(x)$ az „ x páros szám”, $N(x)$ az „ x négyzetszám”, $M(x)$ az „ x negatív szám”, $Q(x, y)$ az „ x osztója y -nak” predikátumokat. Fordítsa le köznapi nyelvre az alábbi formulákat (az individuumtartomány az egész számok halmaza):

- (a) $(\forall x)(N(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge O(x, y)))$;
 (b) $(\exists x)(P(x) \wedge (\forall y)((P(y) \wedge M(y)) \rightarrow (\neg O(y, x))))$.

Tagadja a formulákat, majd a kapott formulának megfelelő ítéletet fogalmazza meg köznapi nyelven úgy, hogy a „nem minden” és a „nincsenek” szavak, illetve ezek szinonímái ne szerepeljenek benne.

8.8. Feladat. Tekintsük a következő predikátumokat, illetve individuumkonstansokat (az individuumtartomány az emberek halmaza):

$$\begin{array}{lll} p: \text{„Péter”}, & A(x): \text{„}x \text{ átmegy a vizsgán”}, & F(x): \text{„}x \text{ felkészült a vizsgára”}, \\ H(x): \text{„}x \text{ hallgató”}, & B(x, y): \text{„}x \text{ az } y \text{ barátja”}, & C(x, y): \text{„}x \text{ csoporttársa } y\text{-nak”}, \\ E(x, y): \text{„}x \text{ egyenlő } y\text{-nal”}, & S(x, y): \text{„}x \text{ szóba áll } y\text{-nal”}. \end{array}$$

Ezek segítségével formalizálja az alábbi ítéleteket:

- (a) *Néhány hallgatónak nincs barátja.*
 (b) *Minden hallgatónak van barátja.*
 (c) *Bizonyos hallgatók csak a csoporttársaikkal állnak szóba.*
 (d) *Ha Péter, és rajta kívül még valaki felkészült a vizsgára, akkor legalább ketten átmennek a vizsgán.*
 (e) *Ha Péter felkészült a vizsgára, de más nem, akkor legfeljebb egyvalaki megy át a vizsgán.*

8.9. Feladat. Formalizálja a predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket (individuumtartományának tekintjük az emberek halmazát).

- (a) *Vannak nőtlen férfiak.*
 (b) *Minden anya nő, de van olyan nő, aki nem anya.*
 (c) *Jánosnak van szülője, de nincs gyermeke.*
 (d) *A becsületes férfiak házastársai is becsületesek.*
 (e) *Mindenkinek két szülője van.*
 (f) *Ha nem csak Jánoson becsületes, akkor egyes házasságokban élő apák is becsületesek.*

A predikátumok és individuumkonstansok legyenek a következők:

$$\begin{array}{lll} j: \text{„János”}, & A(x): \text{„}x \text{ anya”}, & B(x): \text{„}x \text{ becsületes”}, \\ F(x): \text{„}x \text{ férfi”}, & H(x, y): \text{„}x \text{ házastársa } y\text{-nak”}, & E(x, y): \text{„}x \text{ egyenlő } y\text{-nal”}, \\ S(x, y): \text{„}x \text{ szülője } y\text{-nak”}. \end{array}$$

8.10. Feladat. Formalizálja a predikátumkalkulusban az alábbi ítéletet, ahol az individuumtartomány Micimackó és barátainak halmaza.

Micimackó és barátai közül pontosan Tigris és a kenguruk tudnak ugrálni.

A predikátumok és individuumkonstansok legyenek a következők:

$$\begin{array}{lll} m: \text{„Micimackó”}, & t: \text{„Tigris”}, & K(x): \text{„}x \text{ kenguru”}, \\ U(x): \text{„}x \text{ tud ugrálni”}, & B(x, y): \text{„}x \text{ barátja } y\text{-nak”}, & E(x, y): \text{„}x \text{ egyenlő } y\text{-nal”}. \end{array}$$

8.11. Feladat. Formalizálja a predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket (az individuumtartomány az emberek halmaza):

- (a) *Minden matematikus éhes.*
 (b) *Ha egy szakács éhes, főz magának.*
 (c) *Az éhes matematikusok nem kedvelik a szakácsokat.*
 (d) *Minden matematikus kedveli a neki főző szakácsokat.*
 (e) *Ha egy szakács nem kedvel egy matematikust, de főz neki, akkor a matematikus rosszul lesz.*
 (f) *Van olyan szakács, aki csak matematikusnak főz.*
 (g) *Van olyan ember, aki főz, de nem szakács.*

8.12. Feladat. Formalizálja predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket (individuumtartományának tekintjük az emberek halmazát).

- (a) *Vannak szerencsés milliomosok.*
 (b) *Mézga Géza szerencsétlen, de gyermekei szerencsések.*
 (c) *Szerencsés milliomosoknak legalább két gyermekük van.*

8.13. Feladat. Fogalmazza meg köznapi nyelven azt az ítéletet, amelyet a

$$(\forall x)(P(x) \rightarrow (\exists y)(P(y) \wedge (y > x)))$$

formula formalizál, ahol az individuumtartomány az egész számok halmaza, $>$ a szokásos nagyobb reláció, és $P(x)$ az „ x páros szám” predikátum.

8.14. Feladat. Határozza meg a **8.8-8.12. Feladatokban** kapott formulák tagadásának azt az alakját, amelyben legfeljebb predikátumot tagadunk, és fogalmazza meg a megfelelő ítéletet köznapi nyelven, minél egyszerűbb formában.

8.15. Feladat. Teljesül-e az

(a) $((\exists x)N(x) \wedge (\exists x)K(x)) \rightarrow (\exists x)(N(x) \wedge K(x));$

(b) $(\exists x)(N(x) \vee P(x)) \rightarrow ((\exists x)N(x) \vee (\exists x)P(x))$

formula az $(A; N, K, P)$ interpretációnál, ahol $A = \mathbb{Z}$, N a négyzetszámok, K a köbszámok, P pedig a prímszámok halmaza? Logikailag igaz-e az (a), illetve (b) formula?

8.16. Feladat. Adjon meg egy kételemű halmazon olyan interpretációt, ahol a

$$(\forall x)(P(x) \vee P(f(x))) \wedge (\exists x)(Q(x) \wedge (\neg P(f(f(x))))))$$

ítélet igaz.