

FELADATOK A „KOMPLEX SZÁMOK” TÉMAKÖRHÖZ

7.1. Feladat. Kanonikus alakkal számolva határozza meg az alábbi műveletek végeredményét!

- (a) $(3 + 5i)(2 - 7i)$;
- (b) $(-6 + 9i + 4 - 8i) \cdot i$;
- (c) $\frac{-7-i}{1+4i}$;
- (d) $\frac{(-2+3i)(8+i)}{(-4-7i)(1-i)}$;
- (e) $(2 + 5i)^2 + \overline{(2 + 5i)^2}$;
- (f) $(1 + 2i)^3; (1 + 2i)^4$;
- (g) $(\frac{(3+i)(-1+i)}{2+i})^2 - (\frac{(3+i)(-1-i)}{2-i})^2$;
- (h) $i^{2003}; i^{-22}; i^{1984}; i^{801}$.

7.2. Feladat. Kanonikus alakkal számolva adja meg a következő komplex számokat!

- (a) \sqrt{i} ;
- (b) $\sqrt{-3 + 4i}$;
- (c) $\sqrt{-5 - 12i}$;
- (d) $\sqrt{-9 + 40i}$;
- (e) $\sqrt[4]{i}$;
- (f) $\sqrt[4]{-16}$;
- (g) $\sqrt[4]{-7 - 24i}$.

7.3. Feladat. Az alábbi kanonikus alakban adott komplex számokat írja át trigonometrikus alakba, és ábrázolja azokat a Gauss-féle számsíkon!

$$5; \quad -5; \quad i; \quad -8i; \quad \sqrt{2} + \sqrt{2}i; \quad \frac{7}{2} - \frac{7\sqrt{3}}{2}i; \quad -\sqrt{3} - i; \quad -2 - 2i; \quad 3 + 4i.$$

7.4. Feladat. Az alábbi trigonometrikus alakban adott komplex számokat írja át kanonikus alakba, és ábrázolja azokat a Gauss-féle számsíkon!

- (a) $2(\cos 0 + i \sin 0)$;
- (b) $\sqrt{2}(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4})$;

- (c) $\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6}$;
 (d) $2(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3})$.

7.5. Feladat. Trigonometrikus alakkal számolva határozza meg az alábbi műveletek eredményét!

- (a) $(\sqrt{3} - i)(2 + 2\sqrt{3}i)$;
 (b) $\frac{1-i}{1+i}$;
 (c) $\frac{(-1-i)(\sqrt{3}+i)}{(-1+i)(-\sqrt{3}+i)}$;
 (d) $(\sqrt{3} - i)^{67}$;
 (e) $(1 + i)^{1222}$;
 (f) $(-3 - 3\sqrt{3}i)^{1526}$;
 (g) $\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000} + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000}$;
 (h) $\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000} + \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^{2000}$.

7.6. Feladat. Adja meg kanonikus alakban a $z = \frac{(-1 + i)^6}{(\sqrt{3} - i)^8}$ komplex számot.

7.7. Feladat. Adja meg kanonikus és trigonometrikus alakban a következő gyökvo-
nások eredményét:

- (a) $\sqrt[4]{-16}$;
 (b) $\sqrt[3]{-8}$;
 (c) \sqrt{i} ;
 (d) $\sqrt[4]{i}$;
 (e) $\sqrt[6]{64}$;
 (f) $\sqrt[3]{-8i}$;
 (g) $\sqrt[3]{i}$;
 (h) $\sqrt[4]{-1 - \sqrt{3}i}$;
 (i) $\sqrt{\frac{2i}{1-i}}$

7.8. Feladat. Határozza meg a $z = \frac{1+i}{\sqrt{3}-i}$ komplex szám 4-edik gyökeit, és ezen gyökök összegét.

7.9. Feladat. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a) $x^2 + (1 + 3i)x + (-2 + i) = 0$;
 (b) $x^2 - (4 - 2i)x + (11 + 2i) = 0$;
 (c) $x^2 - (7 + i)x + (16 + 11i) = 0$;

- (d) $x^2 - (4 + 3i)x + (1 + 7i) = 0$;
 (e) $(2 + i)x^2 + (5 - i)x + (2 - 2i) = 0$.

7.10. Feladat. Oldja meg a $z^2 - 6i - 4z + 3 + 2iz = 0$ egyenletet a komplex számok körében.

7.11. Feladat. Határozza meg azokat a komplex számokat, amelyeknek konjugáltja egyenlő az eredeti szám négyzetével.

7.12. Feladat. Oldja meg az alábbi egyenleteket a komplex számok halmazán:

- (a) $\bar{z} + |z| = 4 - 3i$;
 (b) $z^2 + |z|^2 = 8 + 6i$;
 (c) $z^2 + 3\bar{z}^2 = 15 - 4i$;
 (d) $z^2 + 4\bar{z} = |z|^2 + 6$;
 (e) $z^2 + 6\bar{z} = |z|^2 + 16$;
 (f) $i\bar{z} = z^2$;
 (g) $|z| - z = 1 + 2i$;
 (h) $\bar{z}^2 z = -8i$;
 (i) $z^2 \bar{z} = 5 + 10i$.

7.13. Feladat. Oldja meg a $(z + i)^3 = 8i$ egyenletet a komplex számok halmazán.

7.14. Feladat. Egy z komplex számra $1 + z + z^2 = 0$ teljesül. Igazolja, hogy

$$z^{65} + \frac{1}{z^{65}} = i^{66}.$$

7.15. Feladat. Ábrázolja Gauss-számsíkon a

- (a) harmadik;
 (b) negyedik;
 (c) hatodik;
 (d) nyolcadik

egységgyököket, és állapítsa meg, melyek közülük rendre a primitív harmadik, negyedik, hatodik, nyolcadik egységgyökök!

7.16. Feladat. Az alábbi komplex számok közül melyek egységgyökök? Melyek lehetnek primitív n -edik egységgyökök valamely n pozitív egészre, adjuk meg a megfelelő n -eket:

- (a) $\frac{1}{2} - \frac{i}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $\cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8}$,
 (b) $\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$, $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$, $\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12}$.

7.17. Feladat. Határozza meg az n -edik komplex egységgyökök szorzatát ($n \in \mathbb{N}$).

7.18. Feladat. Határozza meg az alábbi hatványokat:

- (a) ε^{669} , ahol ε primitív hatodik egységgyök;
- (b) ε^{2004} , ahol ε primitív nyolcadik egységgyök;
- (c) ε^{2001} , ahol ε primitív hatodik egységgyök;
- (d) ε^{33} , ahol ε primitív hatodik egységgyök.

7.19. Feladat. Bizonyítsa be, hogy ha egy ε komplex szám 10. és 14. egységgyök egyszerre, akkor ε csak 1 vagy -1 lehet.

7.20. Feladat. Igaz-e, hogy ha z_1 és z_2 n -edik egységgyökök, akkor az összegük is az?