FELADATOK A „TELJES INDUKCIÓ, HALMAZOK" TÉMAKÖRHÖZ

Diszkrét Matematika

1. TELJES INDUKCIÓ

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából („zöld könyv") XIX. fejezet.

1.1. Feladat. Igazolja teljes indukcióval, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $6 \mid n^3 - n$.

1.2. Feladat. Igazolja teljes indukcióval, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén $6 \mid n(n^2 + 5)$.

1.3. Feladat. Igazolja teljes indukcióval, hogy tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} .$$

2. HALMAZOK

Összefoglaló feladatgyűjtemény matematikából („zöld könyv") II. fejezet:
170., 172., 176., 191., 205., 225.
Matematika feladatgyűjtemény I. („sárga csíkos") I. fejezet:
1., 4., 5., 13., 28., 41., 42., 55., 58., 62., 64., 69., 130., 132., 136., 142.

DM II./1., 2., 3., 4., 5., 6., 7., 15. feladat

2.1. Feladat. Egyenlő-e az alábbi két halmaz:

(a) $X = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ és } \sqrt{x^2} = x\}$, $Y = \{y \in \mathbb{N} : 7 < y < 11 \text{ és } y \text{ prím}\}$;
(b) $X = \{x \in \mathbb{R} : x < 0 \text{ és } |x| = x\}$, $Y = \{y \in \mathbb{N} : 13 < y < 17 \text{ és } y \text{ prím}\}$;

Határozza meg $P(X)$-et és $P(Y)$-t!

2.2. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B halmazok esetén, ha $P(A) = P(B)$, akkor $A = B$.

Typeset by $\mathcal{AMS}$-TEX

2.3. Feladat. Legyen $A = \big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\big\}$. Döntse el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz:

$$\emptyset \in A,\ \emptyset \subseteq A,\ \{\emptyset\} \in A,\ \{\emptyset\} \subseteq A,\ \{\{\emptyset\}\} \in A,\ \{\{\emptyset\}\} \subseteq A,\ \{\{\emptyset\}, \emptyset\} \in A,\ \{\{\emptyset\}, \emptyset\} \subseteq A\,.$$

2.4. Feladat. Döntse el, hogy az alábbiak közül melyik igaz és melyik nem igaz, tetszőleges olyan A, B halmazokra, amelyekre $A \cup B \subseteq B$:

$$A \subseteq B, \qquad A = B, \qquad B \setminus A = \emptyset\ .$$

2.5. Feladat. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül bármely olyan A és B halmazra, amelyre $A \cap B = A \cup B$ fennáll:

$$A \subseteq B, \qquad A \bigtriangleup B = B, \qquad A = B\ .$$

2.6. Feladat. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül bármely olyan A és B halmazra, amelyre $A \bigtriangleup B = A$ fennáll:

$$A \cap B = A, \qquad B \setminus A = \emptyset, \qquad B = \emptyset\ .$$

2.7. Feladat. Melyik igaz és melyik hamis az alábbi állítások közül bármely olyan A és B halmazra, amelyre $A \bigtriangleup B \subseteq A$ fennáll:

$$A \setminus B = A, \qquad B \subseteq A, \qquad A \setminus B \subseteq A\ .$$

2.8. Feladat. Mit mondhatunk az A és B halmazokról, ha tudjuk, hogy $A \bigtriangleup B = \emptyset$?

2.9. Feladat. Bizonyítsa be, hogy tetszőleges A, B, C halmazok esetén ha $C \subseteq A \cap B$, akkor

$$(A \cup B) \bigtriangleup C = (A \cup B) \setminus C.$$

2.10. Feladat. Van-e olyan A, B, C halmaz, hogy

$$A \cap B \neq \emptyset, \qquad A \cap C = \emptyset \qquad \text{és} \qquad (A \cap B) \setminus C = \emptyset\ ?$$

2.11. Feladat. Van-e olyan A, B, C halmaz, hogy

$$A \subseteq B \in C \qquad \text{és} \qquad A \in B \subseteq C\,?$$

2.12. Feladat. Adja meg az $A \cup (B \cap (C \cup D))$ halmaz komplementerét az A, B, C, D halmazok és komplementereik segítségével.

2.13. Feladat. Igazolja elemekre való hivatkozással, illetve azonosságok felhasználásával, hogy tetszőleges A, B halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $$(\overline{A} \cup B) \cap A = A \cap B\,;$$

(b) $$A = (A \cup B) \setminus (B \setminus A)\,;$$

(c) $$A \setminus (B \setminus A) = (A \cap B) \cup (A \setminus B)\,;$$

(d) $$(A \triangle B) \triangle (A \cap B) = A \cup B\,.$$

2.14. Feladat. Igazolja elemekre való hivatkozással, illetve azonosságok felhasználásával, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

(a) $$((A \cap C) \cup B) \setminus B = (A \cap C) \setminus B\,;$$

(b) $$(A \cup C) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cup C\,;$$

(c) $$(A \cap B) \setminus (B \setminus (A \cup C)) = A \cap B\,;$$

(d) $$C \setminus (A \cap B) = (C \setminus A) \cup (C \setminus B)\,;$$

(e) $$A \setminus \big(A \setminus (B \setminus (B \setminus C))\big) = A \cap B \cap C\,;$$

(f) $$(A \setminus B) \cap C = (A \cap C) \setminus (B \cap C)\,;$$

(g) $$A \cap (B \cup (A \cap C)) = (A \cap B) \cup (A \cap C)\,;$$

(h) $$\overline{(A \setminus (B \cup C))} = \overline{A} \cup B \cup C\,;$$

(i) $$C \setminus (A \cap B) = \big(C \setminus (A \cap C)\big) \cup \big(C \setminus (B \cap C)\big)\,;$$

(j) $$\big((A \setminus (A \cap B)\big) \cup \big(A \setminus (A \cap C)\big) = A \setminus (B \cap C)\,;$$

(k) $$(A \setminus C) \cup (B \setminus C) = \overline{\overline{(A \cup B)} \cup C}\,;$$

(l) $$(A \cap B) \cup (A \cap C) = A \setminus \big(\overline{B} \cap \overline{(A \cap C)}\big)\,.$$

2.15. Feladat. Tudjuk, hogy a halmazok körében a metszés és az egyesítés disztributív egymásra nézve (ld. DM II.1.15 Tétel), valamint hogy a metszés disztributív a szimmetrikus különbségképzésre nézve (ld. DM II.8/2.(e) feladat).

(a) Mutasson rá egy példával, hogy a szimmetrikus különbségképzés *nem* disztributív a metszésre nézve.

(b) Bizonyítsa be tetszőleges A, B, C halmazok esetén, hogy $A \triangle (B \cap C) = (A \triangle B) \cap (A \triangle C)$ akkor, és csak akkor teljesül, ha $A \cap B = A \cap C$.

2.16. Feladat.

(a) Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra, ha $A \cup C = B \cup C$ és $C \setminus A = C \setminus B$, akkor $A = B$.

(b) Legyenek A, B és C olyan halmazok, hogy $A \cup C = B \cup C$ és $A \setminus C = B \setminus C$. Következik-e ebből, hogy $A = B$?

2.17. Feladat. Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C, D halmazokra teljesül, hogy

(a) $(A \cup B) \cap (C \cup D) \supseteq (A \cap C) \cup (B \cap D)\,;$

(b) $(A \cap C) \setminus \big(B \setminus (C \cup D)\big) \supseteq (A \cap C \cap D)\,.$

2.18. Feladat.

(a) Igazolja, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra

$$(A \triangle B) \cup C \supseteq (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B)\,,$$

továbbá, hogy itt egyenlőség teljesül, ha $A \cap B \cap C = \emptyset$.

(b) Igazolja az (a)-beli utóbbi állítás megfordítását, azaz azt, hogy tetszőleges A, B, C halmazok esetén ha

$$(A \triangle B) \cup C = (A \cup B \cup C) \setminus (A \cap B), \quad \text{akkor} \quad A \cap B \cap C = \emptyset$$

2.19. Feladat. Mutassa meg, hogy az alábbi egyenlőségek ekvivalensek egymással tetszőleges A, B, C halmazokra:

(a) $A \triangle B = C\,,$ (b) $B \triangle C = A\,,$ (c) $C \triangle A = B\,.$

2.20. Feladat. Vezessünk be egy új műveletet a halmazok körében: legyen A és B az U univerzum részhalmaza, és legyen $A \sqcap B := \overline{A \cap B}$. Igazolja, hogy $\overline{A} = A \sqcap A$ és $A \cap B = (A \sqcap B) \sqcap (A \sqcap B)$. Hogyan fejezhető ki az egyesítés a $\sqcap$ művelet segítségével?

2.21. Feladat. Döntse el, hogy az $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ halmaz hatványhalmazának alábbi részhalmazai osztályozásai-e az A halmaznak:

(a) $\mathcal{C}_1 = \{\{a\}, \{c, d\}, \{b, e, f\}\}$;
(b) $\mathcal{C}_2 = \{\{a, b\}, \{c, d, e\}, \{f\}\}$;
(c) $\mathcal{C}_3 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, c, e, f\}\}$;
(d) $\mathcal{C}_4 = \{\emptyset, \{a, c, d\}, \{b, e, f\}\}$;
(e) $\mathcal{C}_5 = \{\emptyset, \{a\}, \{d\}, \{b, e, f\}\}$;
(f) $\mathcal{C}_6 = \{\{a, c\}, \{d\}, \{b, f\}\}$.

2.22. Feladat. Adjon meg olyan osztályozást az $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ halmazon, amelynek

(a) legalább három osztálya van;
(b) pontosan három osztálya van;
(c) legalább két osztálya van és minden osztálya legalább kételemű;
(d) legalább három osztálya van és minden osztálya legalább háromelemű.