Diszkrét matematika I.

2014. november 7.

Komplex számok

Egységgyökök

Definíció: *n*-edik egységgyök ($n \in \mathbb{N}$).

Az $1 = 1 + 0 \cdot i \in \mathbb{C}$ komplex szám n-edik gyökeit *n-edik egységgyököknek* nevezzük.

Tétel.

Legyen n természetes szám. Ekkor az n-edik egységgyökök:

$$\varepsilon_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1).$$

Így $\varepsilon_0 = 1$ és $\varepsilon_k = \varepsilon_1^k$.

1. egységgyök: $1,$
2. egységgyök: $1, -1,$
3. egységgyök: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$
4. egységgyök: $1, i, -1, -i$
5. egységgyök: $\cos \frac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{5} \quad (k = 0, 1, \ldots, 4)$
6. egységgyök: $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

$\vdots \qquad \vdots$

Megjegyzés.

Az n-edik egységgyökök egy szabályos n-szöget alkotnak a komplex számsíkon, melynek egyik csúcsa 1 és középpontja az origó.

Definíció: primitív n-edik egységgyök ($n \in \mathbb{N}$).

Az ε n-edik egységgyök *primitív n-edik egységgyök*, ha n a legkisebb olyan pozitív egész ℓ kitevő, amelyre $\varepsilon^\ell = 1$ teljesül.

Azaz ε primitív n-edik egységgyök, ha nem ℓ-edik egységgyök valamely ℓ-re, ahol $\ell < n$.

1. egységgyök: $1,$
2. egységgyök: $1, -1,$
3. egységgyök: $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$
4. egységgyök: $1, i, -1, -i$
5. egységgyök: $1, \cos\frac{2k\pi}{5} + i \cdot \sin\frac{2k\pi}{5} \quad (k = 1, \ldots, 4)$
6. egységgyök: $1, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, -1, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot i$

$\vdots \qquad \vdots$

Tétel.

Legyen $n \in \mathbb{N}$ és $k \in \mathbb{N}_0$, $k \leqslant n-1$. Ekkor az $\varepsilon_k = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \cdot \sin \frac{2k\pi}{n}$ n-edik egységgyök pontosan akkor primitív n-edik egységgyök, ha $\text{ln.k.o.}(k, n) = 1$.

Polinomok

Polinomok maradékos osztása, azaz a polinomosztás

Adott f és g ugyanazon K test feletti polinomok estén adjunk meg olyan q és r szintén K feletti polinomokat, hogy

$$f = g \cdot q + r$$

és $r^* < g^*$ teljesüljön.

Példa.

Osszuk el maradékosan az $f = x^4 + x^3 - 5x^2 + 7x - 6$ polinomot a $g = x^2 + 3x - 1$ polinommal ($f, g \in \mathbb{Q}[x]$).

Megoldás.

$$\underbrace{f}_{\text{osztandó}} = \underbrace{g}_{\text{osztó}} \cdot \underbrace{(x^2 - 2x + 2)}_{\text{hányados}} + \underbrace{(-x - 4)}_{\text{maradék}}.$$

Definíció: gyöktényezős alak.

Minden legalább elsőfokú komplex együtthatós polinom elsőfokú polinomok szorzatára bontható. Ha $f = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 \in \mathbb{C}[x]$, ahol $a_n \neq 0$, akkor f-nek multiplicitással számolva n darab gyöke van. Ha f komplex gyökei $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, akkor

$$f = a_n(x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_n).$$

Ez az f polinom **gyöktényezős** alakja.

Példa.

(a) $3x^2 - 12x + 12 \rightsquigarrow 3(x-2)(x-2)$

(b) $x^2 + 6x + 10 \rightsquigarrow \big(x - (-3-i)\big)\big(x - (-3+i)\big)$

(c) $x^5 + x^3 - 6x \rightsquigarrow x(x-\sqrt{3}i)(x+\sqrt{3}i)(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$

(d) $x^5 + 8x^2 \rightsquigarrow x^2(x^3+8) = x^2(x-\omega_0)(x-\omega_1)(x-\omega_2)$

Interpoláció.

A függvény nem ismert értékeire az ismert értékek alapján ad közelítést.

Tétel (Lagrange-féle interpoláció).

Legyenek $x_1, \dots, x_n$ páronként különböző és $y_1, \dots, y_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor pontosan egy olyan legfeljebb $(n-1)$-edfokú $\mathbb{R}[x]$-beli polinom van, amelyre helyettesítési értéke az x_j helyen y_j $(j = 1, \dots, n)$.

Definíció: Lagrange-féle k-adik interpolációs alappolinom.

Legyenek $x_1, \dots, x_n$ páronként különböző és $y_1, \dots, y_n$ tetszőleges valós számok. Ekkor a **Lagrange-féle k-adik interpolációs alappolinom**:

$$\ell_k = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_n)}.$$

Vegyük észre, hogy $\ell_k(x_k) = 1$ és $\ell_k(x_j) = 0$ $(j \neq k)$.

Tétel.

A Lagrange-féle interpolációs polinom:

$$P = \sum_{k=1}^{n} y_i \cdot \ell_k.$$

Példa.

Határozzuk meg azt a legalacsonyabb fokú $f \in \mathbb{R}[x]$ polinomot, amely a $0, 1, 3$ helyeken a $6, -2, -12$ értékeket veszi fel.

Megoldás.

$$\ell_1 = \frac{(x-1)(x-3)}{(0-1)(0-3)} = \frac{1}{3}x^2 - \frac{4}{3}x + 1,$$

$$\ell_2 = \frac{(x-0)(x-3)}{(1-0)(1-3)} = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x,$$

$$\ell_3 = \frac{(x-0)(x-1)}{(3-0)(3-1)} = \frac{1}{6}x^2 - \frac{1}{6}x,$$

$$P = 6 \cdot \ell_1 + (-2) \cdot \ell_2 + (-12) \cdot \ell_3 = x^2 - 9x + 6.$$

Ítéletkalkulus

Definíció: ítélet.

Az **ítélet** olyan állítás, amely vagy igaz vagy hamis.

Példa.

(a) *Esik az eső.*
(b) *A Hold kering a Föld körül.*
(c) *Miért kering a Hold a Föld körül?*
(d) *Most nem mondok igazat.*

Logikai műveletek:

A	B	(**konjunkció**) $A \wedge B$	(**diszjunkció**) $A \vee B$	(**implikáció**) $A \rightarrow B$	(**ekvivalencia**) $A \leftrightarrow B$
h	h	h	h	i	i
h	i	h	i	i	h
i	h	h	i	h	h
i	i	i	i	i	i

Valamint a **negáció** ($\neg$).

Definíció: prímítélet.

A **prímítélet** olyan ítélet, amely nem tartalmaz logikai műveletet.

Példa.

Ha esik az eső és nincs rossz kedvem, akkor pontosan akkor megyek dimat előadásra, ha dolgozatot írunk.

Megoldás. *Ha* $\underbrace{\textit{esik az eső}}_{A}$ *és nincs* $\underbrace{\textit{rossz kedvem}}_{B}$, *akkor pontosan akkor* $\underbrace{\textit{megyek dimat előadásra}}_{C}$, *ha* $\underbrace{\textit{dolgozatot írunk}}_{D}$.

$$\big(A \wedge (\neg B)\big) \rightarrow (C \leftrightarrow D)$$

Példa.

Ha a róka okos, és megkérdezi a hollót, akkor ha a holló buta, akkor vagy kinyitja a csőrét, vagy leejti a sajtot.

Megoldás. *Ha* $\underbrace{\textit{a róka okos}}_{A}$, *és* $\underbrace{\textit{megkérdezi a hollót}}_{B}$, *akkor ha* $\underbrace{\textit{a holló buta}}_{C}$, *akkor vagy* $\underbrace{\textit{kinyitja a csőrét}}_{D}$, *vagy* $\underbrace{\textit{leejti a sajtot}}_{E}$.

$$(A \vee B) \to \big(C \to (D \vee E)\big)$$

Definíció: formula.

Legyen $A_1, \ldots, A_n$ ítéletváltozók (logikai változók).

- Az ítéletváltozók mindegyike formula.
- Ha F és G formulák, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$ és $(F \leftrightarrow G)$ is formulák.

Definíció: logikai ekvivalencia.

Az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, ha logikai értékük a bennük szereplő logikai változók bármely logikai értéke esetén megegyezik.

Példa.

$$A \leftrightarrow B \equiv (A \to B) \wedge (B \to A)$$

Megoldás.

A	B	$A \leftrightarrow B$	$(A \to B) \wedge (B \to A)$
h	h	i	i
h	i	h	h
i	h	h	h
i	i	i	i

Példa.

$$(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$$

Megoldás.

A	B	C	$(A \wedge B) \to C$	$A \to (B \to C)$
h	h	h	i	i
h	h	i	i	i
h	i	h	i	i
i	h	h	i	i
h	i	i	i	i
i	h	i	i	i
i	i	h	h	h
i	i	i	i	i

Példa.

$$(A \wedge B) \to C \equiv A \to (B \to C)$$

Megoldás.

$$\begin{aligned}
(A \wedge B) \to C &\equiv \big(\neg(A \wedge B)\big) \vee C & A \to B \equiv \neg A \vee B \\
&\equiv (\neg A \vee \neg B) \vee C & \text{De Morgan szab.} \\
&\equiv \neg A \vee (\neg B \vee C) & \text{asszoc.} \\
&\equiv \neg A \vee (B \to C) & \neg A \vee B \equiv A \to B \\
&\equiv A \to (B \to C) & \neg A \vee B \equiv A \to B
\end{aligned}$$

Definíció: teljes diszjunktív normálforma.

Az $A_1, \ldots, A_n$ változókból felépített formulát **teljes diszjunktív normálformának nevezzük** (TDNF), ha $K_1 \vee \cdots \vee K_\ell$ alakú, ahol $K_1, \ldots, K_\ell$ páronként különböző n-tagú konjunkciók, melyekben az $A_1, \ldots, A_n$ változók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul.

Tétel.

Bármely $F = F(A_1, \ldots, A_n)$ formula logikailag ekvivalens egy $H = H(A_1, \ldots, A_n)$ TDNF-val, és H a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelmű.

Példa.

Adjuk meg a $B \wedge \Big(\neg\big((A \rightarrow C) \wedge (A \vee C)\big)\Big)$ formula teljes diszjunktív normálformáját.

Megoldás.

A	B	C	$B \wedge \Big(\neg\big((A \rightarrow C) \wedge (A \vee C)\big)\Big)$
h	h	h	h
h	h	i	h
h	i	h	i
i	h	h	h
h	i	i	h
i	h	i	h
i	i	h	i
i	i	i	h

Példa.

Adjuk meg a $B \wedge \Big(\neg\big((A \to C) \wedge (A \vee C)\big)\Big)$ formula teljes diszjunktív normálformáját.

Megoldás.

A	B	C	$B \wedge \Big(\neg\big((A \to C) \wedge (A \vee C)\big)\Big)$
h	h	h	h
h	h	i	h
h	i	h	i
i	h	h	h
h	i	i	h
i	h	i	h
i	i	h	i
i	i	i	h

Definíció: tautológia.

Az F formula **tautológia**, ha F logikai értéke az F-ben fellépő logikai változók tetszőleges logikai értéke mellett igaz. Jelölés: $\models F$.

Példa.

Az $(A \vee B) \to \big((A \vee \neg B) \to A\big)$ formula tautológia.

Definíció: logikai következmény.

Legyenek az $F_1, \ldots, F_n$ és G tetszőleges ítéletkalkulusbeli formulák. A G formula **logikai következménye** az $F_1, \ldots, F_n$ formuláknak, ha a formulákban előforduló változóknak az összes lehetséges módon értéket adva minden olyan esetben, amikor az $F_1, \ldots, F_n$ formulák mindegyike igaz, akkor G is igaz. Az $F_1, \ldots, F_n$ formulák a **premisszák**, G a **konklúzió**. Jelölés: $F_1, \ldots, F_n \models G$.

Példa.

Helyes-e az $A \to (B \wedge C), \neg B \vee \neg C \models \neg A$ következtetés?

Tétel.

Tetszőleges F és G formulákra ekvivalensek az alábbiak.

(a) $F \models G$

(b) $\models F \to G$

Predikátumkalkulus

Példa.

Néhány hallgatónak nincs barátja.

Definíció.

Az olyan egy- vagy többváltozós függvényt, amelyből a változók bármely, alkalmas objektumokkal való helyettesítése után egy-egy ítéletet keletkezik, **predikátumnak** nevezzük. Azon objektumok összességét, amelyeket a predikátum változóiba helyettesítünk **individuumtartománynak** nevezzük. Az individuumtartomány elemei az **individuumkonstansok**.

Az előző példában az individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok pedig a következők:
$H(x)$: x hallgató,
$B(x, y)$: x az y barátja.

Kvantorok.

„minden x-re": **univerzális kvantor** (jel.: $(\forall x)$)
„létezik olyan x, hogy": **egzisztenciális kvantor** (jel.: $(\exists x)$)

Példa.

Néhány hallgatónak nincs barátja.

$$(\exists x)\big(H(x) \wedge \neg(\exists y)B(y,x)\big)$$

Példa.

Minden gyermek szereti a Mikulást.
$G(x)$: x gyermek, $S(x,y)$: x szereti y-t, m: a Mikulás

$$(\forall x)\big(G(x) \rightarrow S(x,m)\big)$$

Példa.

Van olyan felnőtt, aki az édesanyjánál lakik. $F(x)$: x felnőtt, $L(x, y)$: x y-nál lakik, $a(x)$: x édesanyja

$$(\exists x)\Big(F(x) \wedge L\big(x, a(x)\big)\Big)$$

Példa.

Mézga Géza szerencsétlen, de gyerekei szerencsések.
m: Mézga Géza, $S(x)$: x szerencsés, $G(x, y)$: x gyereke y-nak

$$\neg S(m) \wedge (\forall x)\big(G(x, m) \rightarrow S(x)\big)$$

Tagadás.

$$\neg(\forall x)G(x) \equiv (\exists x)\big(\neg G(x)\big),$$
$$\neg(\exists x)G(x) \equiv (\forall x)\big(\neg G(x)\big),$$

Példa.

Minden gyermek szereti a Mikulást.
$G(x)$: x gyermek, $S(x,y)$: x szereti y-t

$$(\forall x)\big(G(x) \to S(x,m)\big)$$

Tagadása: $\neg\Big((\forall x)\big(G(x) \to S(x,m)\big)\Big) \equiv (\exists x)\big(G(x) \wedge \neg S(x,m)\big)$.

Interpretáció.

Példa.

$$(\forall x)\Big(P(x,a) \to (\exists y)\big(f(y) = x\big)\Big)$$

(a) individuumtartomány: $\mathbb{R}$, $P(x,y)$: $y < x$, $=$: egyenlőség rel., $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$, a: 0;

(b) individuumtartomány: az emberek E halmaza, $P(x,y)$: x lánya y-nak, $=$: egyenlőség rel., $f\colon E \to E, x \mapsto x$ anyja, a: Kovács Gedeonné szül. Nagykutasi Magdolna.

Definíció: logikailag igaz formula.

Az F formulát **logikailag igaz formulának (tautológiának)** hívjuk, ha F minden interpretációjánál azonosan igaz.

Példa.

$(\forall x)(\forall y)\big(A(x,y) \vee A(y,x)\big) \to (\forall x)A(x,x)$

Példa.

$\big((\exists x)A(x) \wedge (\exists x)B(x)\big) \to (\forall x)\big(A(x) \wedge B(x)\big)$