DETERMINÁNSOK

2004. szeptember 20.

Irodalom

A fogalmakat, definíciókat illetően két forrásra támaszkodhatnak: ezek egyrészt elhangzanak az előadáson, másrészt megtalálják a jegyzetben:
Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003,
3. fejezet (Az n-edrendű determináns);

további ajánlott irodalom:

D. K. Fagyejev–I. Sz. Szominszkij: *Felsőfokú algebrai feladatok*,
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1973, illetve Typotex Kiadó, 2000;
2. fejezet, 127. a) - c), f) - m), 128. a) - d), 147., 160. - 179., 221., 240., 289. - 291. feladat

Scharnitzky Viktor: *Mátrixszámítás* (példatár, Bolyai-könyvek sorozat),
Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 2000;
A Determinánsok c. fejezetben (fogalmak, jelölések a 7. o.-tól),
Kidolgozott feladatok:
I./1. szakasz, 10. - 11. oldal, 1. - 5. feladat
I./2. szakasz, 19. - 31. oldal, 1. - 9., 19. - 21. feladat
I./3. szakasz, 33. - 35. oldal, 1. - 5. feladat
II. szakasz, 41. - 60. oldal, 1. - 13., 19. - 20., 28. - 32. feladat
III. szakasz, 64. - 67. oldal, 2. - 4. feladat

Kidolgozott példák

1. Példa. Számítsa ki a következő determinánsokat:

$$\text{(a)}\quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} \qquad \text{(b)}\quad \begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} \qquad \text{(c)}\quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix}$$

Megoldás:
(a) A determináns definíciója (3.1. Def.) után tett megjegyzés szerint a másodrendű determináns értéke a főátlóbeli elemek szorzatának és a mellékátlóbeli elemek szorzatának különbsége:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 - 1 \cdot (-3) = 5$$

Typeset by $\mathcal{A}\mathcal{M}\mathcal{S}$-TEX

(b) *1. megoldás:* A determinánst a definíció szerint a következőképpen számítjuk ki:

$$\begin{vmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} + 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} =$$
$$= 1 \cdot \big(4 \cdot (-4) - 1 \cdot (-1)\big) - 5 \cdot \big(3 \cdot (-4) - 2 \cdot (-1)\big) + 2 \cdot \big(3 \cdot 1 - 2 \cdot 4\big) =$$
$$= -15 + 50 - 10 = 25$$

2. megoldás: Harmadrendű (és csak harmadrendű!!) determinánsok esetén alkalmazható az ún. Sarrus-szabály: a determináns első két oszlopát az utolsó oszlop után írjuk, majd képezzük a főátlóban, illetve a vele párhuzamos másik két átlóban lévő elemek szorzatát és ezeket összeadjuk. Hasonlóan járunk el a mellékátlóban, illetve a vele párhuzamosan elhelyezkedő átlókban szereplő elemekkel, de ennek az összegnek a (-1)-szeresét vesszük. Az így keletkező számok összege a determináns értékét adja (ld. a 3.1. Definíció utáni megjegyzést a jegyzetben):

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 5 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -4 & 2 & 1 \end{array}\right| =$$
$$= \big(1 \cdot 4 \cdot (-4) + 5 \cdot (-1) \cdot 2 + 2 \cdot 3 \cdot 1\big) - \big(2 \cdot 4 \cdot 2 + 1 \cdot (-1) \cdot 1 + (-4) \cdot 3 \cdot 5\big) =$$
$$= \big(-16 + (-10) + 6\big) - \big(16 + (-1) + (-60)\big) = 25$$

(c) A determináns értékét megkaphatjuk pl. a 3. oszlopa szerint kifejtve:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} =$$
$$= (-2) \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} +$$
$$+ (-2) \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} + (-3) \cdot (-1)^{4+3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

Ezután meg kellene határozni a négy harmadrendű determináns értékét, ami elég sok számolással járna. Ha „jobb" (több 0-t tartalmazó) oszlopot vagy sort választottunk volna a kifejtéshez (pl. 2. oszlop), akkor kicsit könnyebb lenne a dolgunk. A 0-val való szorzás miatt ugyanis a kifejtés egyik tagja 0, eggyel kevesebb aldeterminánst kellene meghatározni.
A számolás még egyszerűbbé tehető, fölhasználva a determinánsok 3.5.5. Tulajdonságát illetve annak duálisát. Ha ugyanis először az első oszlop elemeinek (-3)-szorosát hozzádjuk a harmadik oszlop megfelelő elemeihez (rövidebben: az első oszlop (-3)-szorosát hozzádjuk a harmadik oszlophoz), illetve az első oszlop elemeit hozzádjuk a negyedik oszlop megfelelő elemeihez (rövidebben: az első oszlopot hozzádjuk a negyedik oszlophoz), akkor a negyedik sorban az első elem kivételével minden elem 0 lesz, így a kapott

determinánst az utolsó sora szerint kifejtve már csak egy harmadrendű (al)determinánst kell meghatározni:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 & -3 \\ 4 & -1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -3 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 3 \\ 4 & -1 & -14 & 13 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{4+1} \begin{vmatrix} 1 & -5 & 2 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & -14 & 13 \end{vmatrix} =$$

Ennek értékét már a Saruss-módszerrel is kiszámíthatjuk, de most talán célszerű tovább alakítani:

$$= \begin{vmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & -5 & 3 \\ -1 & -14 & 13 \end{vmatrix} = (-1) \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -1 & -14 \end{vmatrix} = 19$$

További ajánlott feladatok

1. Feladat. Számítsa ki (minél ügyesebben!) a következő determinánsokat:

(a) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 & 0 \\ -1 & b & 1 & 0 \\ 0 & -1 & c & 1 \\ 0 & 0 & -1 & d \end{vmatrix}$ (b) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ a & b & c & d \\ 2 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ (c) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & a \\ 1 & -1 & -1 & b \\ 1 & 1 & 1 & c \\ 0 & 1 & 0 & d \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$ (e) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 5 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & 2 & 2 \end{vmatrix}$ (f) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 4 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

(g) $\begin{vmatrix} 4 & -2 & 4 & -8 & 16 \\ 4 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 8 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 12 & 6 & 12 & 24 & 48 \\ 4 & -3 & 9 & -27 & 81 \end{vmatrix}$ (h) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 \end{vmatrix}$ (i) $\begin{vmatrix} 1^2 & 2^2 & 3^2 & 4^2 \\ 2^2 & 3^2 & 4^2 & 5^2 \\ 3^2 & 4^2 & 5^2 & 6^2 \\ 4^2 & 5^2 & 6^2 & 7^2 \end{vmatrix}$

2. Feladat. Számítsa ki a következő kifejezések értékét a determinánsok kiszámítása nélkül (felhasználva a determináns tulajdonságait és a determinánsok szorzástételét):

(a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -14 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 5 \\ 1 & -4 & -6 \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 4 & 2 & 4 \\ -4 & -4 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 4 & 4 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{vmatrix}$

Megoldás:

(a) Fölhasználva a determinánsok szorzástételét (3.16. Tétel), az első tagban szereplő két 3×3-as mátrix determinánsának szorzata egyenlő a szorzatuk determinánsával; a szorzás elvégzésével a kifejezés a következő alakba írható:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -14 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$$

Észrevehetjük, hogy az első két determináns csak a harmadik sorban tér el egymástól, ezért alkalmazzuk a jegyzetben található 3.5.4. tulajdonságot:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 15 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ -3 & -1 & -14 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} =$$

Az említett tulajdonságot újra alkalmazva:

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0\,.$$

Ez utóbbi determináns értéke pedig a két azonos sora (3.5.3. tulajdonság!) miatt zérus.

3. Feladat. Határozza meg a következő determinánsok értékét:

(a) $$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & n \\ 0 & 0 & \dots & n-1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

(b) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix}$$

(c) $$\begin{vmatrix} a_1 & a_1+d_1 & \dots & a_1+(n-1)d_1 \\ a_2 & a_2+d_2 & \dots & a_2+(n-1)d_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & a_n+d_n & \dots & a_n+(n-1)d_n \end{vmatrix}$$

(d) $$\begin{vmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{vmatrix}$$

Megoldás:
(b) Adjuk hozzá az első sort a másodikhoz, majd a harmadikhoz, ..., az n-edikhez, a következőt kapjuk:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 & n \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -(n-1) & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 6 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & n-1 & 2n \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{vmatrix} =$$

Trianguláris mátrix értéke megegyezik a főátlóbeli elemek szorzatával:

$$= 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n \ (= n!)$$