Kvadratikus alakok és euklideszi terek

(előadásvázlat, 2017. szeptember 29.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Az előadáshoz ajánlott jegyzet:

- Szabó László: *Bevezetés a lineáris algebrába*, Polygon Kiadó, Szeged, 2003–2006.
- Klukovits Lajos: *Klasszikus és lineáris algebra*, Polygon Kiadó, Szeged, 1999.

1. Megjegyzés. Ebben a fejezetben mindenhol feltesszük, hogy a T testben $1+1 \neq 0$. Ez például a $\mathbb{Z}_2$ testben nem teljesül!

2. Definíció. Legyen U és V vektortér a T test felett. Egy $l : U \times V \to T$ leképezést bilineáris leképezésnek nevezünk, ha

(1) minden $u_1, u_2 \in U$ és $v \in V$ esetén $l(u_1 + u_2, v) = l(u_1, v) + l(u_2, v)$,
(2) minden $u \in U$ és $v_1, v_2 \in V$ esetén $l(u, v_1 + v_2) = l(u, v_1) + l(u, v_2)$,
(3) minden $\lambda \in T$, $u \in U$ és $v \in V$ esetén $l(\lambda u, v) = \lambda l(u, v) = l(u, \lambda v)$.

Az l bilineáris leképezés szimmetrikus, ha $U = V$ és minden $u, v \in U$ esetén $l(u, v) = l(v, u)$.

3. Definíció. Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a T test felett, továbbá $\mathcal{E} : e_1, \dots, e_m$ bázis U-ban és $\mathcal{F} : f_1, \dots f_n$ bázis V-ben. Az $l : U \times V \to T$ bilineáris leképezés mátrixa az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokban az $(l(e_i, f_j)) \in T^{m \times n}$ mátrix. Ha l szimmetrikus, akkor az $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisokat azonosnak választjuk, és így definiáljuk l mátrixát.

4. Példa. Az $l : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $l(u, v) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 6x_3y_3$ bilineáris leképezés mátrixát határozzuk meg. Mivel az l szimmetrikus, így az előző definíció szerint az $\mathbb{R}^3$ vektortér $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisát azonosnak választjuk, mégpedig a standard bázisnak $\mathcal{E} : e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$, és ebben a bázisban adjuk meg az l mátrixát. Keressük azt az $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{3\times3}$ mátrixot, amelyre $a_{ij} = l(e_i, e_j)$, azaz

$$a_{11} = l(e_1, e_1) = l((1, 0, 0), (1, 0, 0)) = 4, \qquad a_{12} = l(e_1, e_2) = l((1, 0, 0), (0, 1, 0)) = 2,$$
$$a_{13} = l(e_1, e_3) = l((1, 0, 0), (0, 0, 1)) = 0, \qquad a_{21} = l(e_2, e_1) = l((0, 1, 0), (1, 0, 0)) = 2.$$

Hasonlóan kiszámítható, hogy $a_{22} = 2$, $a_{23} = -1$, $a_{31} = 0$, $a_{32} = -1$ és $a_{33} = 6$. Így az $\mathcal{E}$ bázisban az l bilineáris leképezés mátrixa:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Tétel. *Legyen U m-dimenziós és V n-dimenziós vektortér a T test felett, $\mathcal{E}$ bázis U-ban, $\mathcal{F}$ bázis V-ben, és $A \in T^{m\times n}$ az $l : U \times V \to T$ bilineáris leképezés mátrixa. Ekkor tetszőleges $u \in U$ és $v \in V$ vektorokra $l(u, v) = xAy^T$, ahol x az u vektor koordinátasora az $\mathcal{E}$ bázisban és y a v vektor koordinátasora a $\mathcal{F}$ bázisban. Tehát a bilineáris leképezés mátrixa (valamely bázisban) egyértelműen meghatározza a bilineáris leképezést.*

6. Tétel. *Legyen V véges dimenziós vektortér a T test felett. Az $l : V \times V \to T$ bilineáris leképezés akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) bázisban szimmetrikus.*

7. Definíció. Legyen V vektortér a T test felett. A $q : V \to T$ leképezést kvadratikus alaknak nevezzük, ha létezik olyan $l : V \times V \to T$ szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyre $q(v) = l(v, v)$ minden $v \in V$ esetén.

8. Tétel. *Bármely kvadratikus alak egyértelműen meghatározza a hozzá tartozó szimmetrikus bilineáris leképezést.*

9. Definíció. A kvadratikus alak valamely bázisbeli mátrixán a kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris leképezés mátrixát értjük.

10. Megjegyzés. A q kvadratikus alak, és a hozzá tarozó l szimmetrikus bilineáris leképezés között a következő összefüggés áll fenn:

$$q(u+v) = l(u+v, u+v) = l(u,u) + l(u,v) + l(v,u) + l(v,v) = q(u) + 2l(u,v) + q(v).$$

Megjegyezzük, hogy ez az összefüggés nemcsak $\mathbb{R}$ felett teljesül, hanem minden olyan T test felett, ahol $1+1 \neq 0$, ezért is volt szükség a fejezet elején szereplő megjegyzésre. A q kvadratikus alakból megkaphatjuk az l szimmetrikus bilineáris leképezést:

$$l(u,v) = \frac{q(u+v) - q(u) - q(v)}{2}.$$

11. Példa. Meghatározzuk a $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ kvadratikus alakhoz tartozó szimmetrikus bilineáris leképezést. Az előző megjegyzésnél kapott formulából az $u = (x_1, x_2, x_3)$ és $v = (y_1, y_2, y_3)$ helyettesítéssel kapjuk, hogy $l : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $l(u,v) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 6x_3y_3$, ami éppen a 4. példában szereplő szimmetrikus bilineáris leképezés. Így az előző definíció szerint a q kvadratikus alak mátrixa is az $\mathcal{E}$ standard bázisban:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Megjegyezés: A $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(u) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ kvadratikus alakhoz tartozó mátrix a standard bázisban közvetlenül is felírható, mégpedig úgy, hogy a négyzetes tagok együtthatói a főátlóba kerülnek, a mátrix többi eleme pedig a megfelelő vegyes tagok együtthatóinak fele lesz. Például a mátrix 2. sorának 3. eleme az x_2x_3 együtthatójának, a -2-nek a fele, -1, de ugyanúgy -1 lesz a 2. oszlop 3. eleme is.

12. Tétel. *Legyen V vektortér a T test felett, $\mathcal{E}$ és $\mathcal{F}$ bázisok V-ben, és $q : V \to T$ kvadratikus alak. Ha q mátrixa A az $\mathcal{E}$ bázisban, és S az áttérés mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisról a $\mathcal{E}$ bázisra, akkor q mátrixa az $\mathcal{F}$ bázisban SAS^T.*

13. Definíció. A q kvadratikus alak rangján valamely (bármely) bázisbeli mátrixának rangját értjük, és $r(q)$-val jelöljük. Azt mondjuk, hogy a q kvadratikus alak az $\mathcal{E}$ bázisban kanonikus alakú, ha mátrixa diagonális.

14. Tétel (Kvadratikus alakok alaptétele). *Bármely véges dimenziós vektortéren értelmezett kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.*

15. Példa. Kanonikus alakra hozzuk a $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ kvadratikus alakot, meghatározzuk azt az $\mathcal{F}$ bázist, ahol a mátrixa diagonális. A 11. példában megadtuk a q kvadratikus alak A mátrixát a standard $\mathcal{E}$ bázisban. Ezt a mátrixot kell úgy diagonális alakra hoznunk, hogy a Gauss-eliminációnál is használt lépéseket hajtunk végre a mátrix sorain, azzal a különbséggel, hogy most minden lépést az oszlopokon is el kell végezni, hogy szimmetrikus mátrixokon keresztül haladjunk. Az A mátrix mellett feltüntetjük az $\mathcal{E}$ bázist is, és azon is végrehajtjuk a sorokra vonatkozó átalakításokat, így megkapjuk, hogy mely bázisban lesz diagonális a kvadratikus alak mátrixa.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Tehát az $\mathcal{F} : (1,0,0), (-\frac{1}{2},1,0), (-\frac{1}{2},1,1)$ bázisban a q kvadrtikus alak $q(v) = 4y_1^2 + y_2^2 + 5y_3^2$ kanonikus alakú.

16. Következmény. *Bármely A szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan S nemelfajuló mátrix, amelyre SAS^T diagonális.*

17. Példa. Megadjuk az A mátrixhoz az S nemelfajuló mátrixot, amelyre SAS^T diagonális, ahol

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix a 15. példában szereplő q kvadratikus alak mátrixa a standard bázisban, minden szimmetrikus megadható ilyen módon kvadratikus alak. Ha a 15. példában kapott $\mathcal{F}$ bázis elemeit beírjuk egy mátrix soraiba, akkor a keresett S nemelfajuló mátrixot kapjuk:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Az SAS^T diagonális mátrix pedig a q kvadratikus alak $\mathcal{F}$ bázisbeli kanonikus alakjának mátrixa lesz.

18. Definíció. Az $\mathbb{R}$ valós számtest feletti véges dimenziós vektortereken értelmezett kvadratikus alakokat valós kvadratikus alakoknak nevezzük. Az

$$x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$$

alakú kvadratikus alakokat normálalakúnak nevezzük ($0 \le k \le r$).

19. Tétel. *Bármely valós kvadratikus alakhoz megadható a vektortér olyan bázisa, amelyben a kvadratikus alak normálalakú.*

20. Példa. A $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ valós kvadratikus alaknak a 11. példában megadtuk a mátrixát az $\mathcal{E}$ bázisban, ezután a 15. példában megadtuk az $\mathcal{F}$ bázist, ahol kanonikus alakú, azaz a mátrixa diagonális. Meghatározzuk a q valós kvadratikus alak normálalakját, tehát keressük azt a bázist, ahol a mátrixa diagonális és csak 1, -1 és 0 szerepelhet a főátlóban. A 15. példában megadott kanonikus alakú mátrixból és $\mathcal{F}$ bázisból indulunk ki:

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} & | & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & | & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & | & -\frac{1}{2\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}.$$

Tehát a q valós kvadratikus alak a $\mathcal{G} : \left(\frac{1}{2}, 0, 0\right), \left(-\frac{1}{2}, 1, 0\right), \left(-\frac{1}{2\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right)$ bázisban $q(w) = z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$ normálalakú.

21. Tétel (Tehetetlenségi tétel). *Minden valós kvadratikus alak normálalakja egyértelműen meghatározott, azaz ha két bázisban a kvadratikus alak normálalakú, akkor ugyanannyi benne a pozitív, illetve a negatív tagok száma.*

22. Definíció. A valós számtest feletti V vektortéren értelmezett q kvadratikus alak

(1) pozitív definit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) > 0$,
(2) negatív definit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) < 0$,
(3) pozitív szemidefinit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) \ge 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,

(4) negatív szemidefinit, ha minden nemnulla $v \in V$ vektorra $q(v) \leq 0$, és létezik olyan nemnulla $w \in V$ vektor, amelyre $q(w) = 0$,
(5) minden más esetben indefinit, azaz ha léteznek olyan nemnulla $v, w \in V$ vektorok, hogy $q(v) > 0$ es $q(w) < 0$.

23. Tétel. *Legyen $q = x_1^2 + \cdots + x_k^2 - x_{k+1}^2 - \cdots - x_r^2$ valós kvadratikus alak a valós számtest feletti n-dimenziós vektortéren. Ekkor q akkor és csak akkor*
(1) *pozitív definit, ha $k = r = n$,*
(2) *negatív definit, ha $k = 0$ és $r = n$,*
(3) *pozitív szemidefinit, ha $k = r < n$,*
(4) *negatív szemidefinit, ha $k = 0$ és $r < n$,*
(5) *indefinit, ha $0 < k < r$.*

24. Példa. A $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ valós kvadratikus alak pozitív definit, ugyanis a 20. példában megadtuk a normálalakját, ami $z_1^2 + z_2^2 + z_3^2$.

25. Példa. Meghatározzuk a $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(x_1, x_2, x_3) = -x_1^2 + 4x_1x_3 - 2x_2^2 - 8x_2x_3 - 12x_3^2$ valós kvadratikus alak osztályát. A 11. példában található megjegyzés alapján felírjuk a mátrixát a standard bázisban, diagonális alakra hozzuk, majd átalakítjuk úgy, hogy a főátlóban csak 1, -1 és 0 szerepeljen:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 2 & -4 & -12 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & -4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim$$
$$\sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Tehát a q valós kvadratikus alak normálalakja: $-y_1^2 - y_2^2$, így negatív szemidefinit.

26. Következmény. *Minden olyan A valós szimmetrikus mátrixhoz, amelyhez tartozó xAx^T kvadratikus alak pozitív definit, létezik olyan P nemelfajuló valós mátrix, amelyre $A = PP^T$.*

27. Definíció. A valós számtest feletti véges dimenziós V vektorteret euklideszi térnek nevezzük a $\langle -, - \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$ belső szorzattal, ha $\langle -, - \rangle$ olyan szimmetrikus bilineáris leképezés, amelyhez tartozó kvadratikus alak pozitív definit. Az $u \in V$ vektor hosszán (normáján) az $||u|| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$ nemnegatív valós számot értjük. Az u vektor normált, ha $||u|| = 1$.

28. Példa. Az $\mathbb{R}^n$ vektortér euklideszi tér az

$$\langle x, y \rangle = xy^T = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

úgynevezett standard belső szorzattal.

29. Példa. Az $\langle x, y \rangle = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 2x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2 + 6x_3y_3$ szimmetrikus bilineáris leképezéssel is euklideszi tér lesz az $\mathbb{R}^3$ vektortér, hiszen a hozzá tartozó $q(x_1, x_2, x_3) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + 2x_2^2 - 2x_2x_3 + 6x_3^2$ kvadratikus alakról beláttuk a 24. példában, hogy pozitív definit.

30. Tétel (Bunyakovszkij-Cauchy-Schwarz egyenlőtlenség). *Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén*

$$|\langle u, v \rangle| \leq ||u|| \cdot ||v||.$$

31. Tétel (Háromszög egyenlőtlenség). *Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén*

$$||u + v|| \leq ||u|| + ||v||.$$

32. Definíció. Euklideszi tér tetszőleges u, v vektora esetén létezik egy egyértelműen meghatározott $0 \leq \alpha \leq \pi$ szög, hogy

$$\cos \alpha = \frac{\langle u, v \rangle}{||u|| \cdot ||v||},$$

amelyet az u és v vektorok szögének nevezünk. Azt mondjuk, hogy az u és v vektorok merőlegesesek (ortogonálisak), ha $\langle u, v \rangle = 0$, amit $u \perp v$-vel jelölünk.

33. Definíció. Az $u_1, \ldots, u_k$ vektorrendszer ortogonális, ha bármely $1 \leq i < j \leq k$ esetén $u_i \perp u_j$. Ha az $u_1, \ldots, u_k$ vektorok normáltak is, akkor ortonormált vektorrendszerről beszélünk. Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrixot ortogonális mátrixnak nevezzük, ha sorvektorrendszere ortonormált az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térben.

34. Következmény. *Az $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ mátrix akkor és csak akkor ortogonális, ha $AA^T = E$, azaz $A^{-1} = A^T$.*

35. Definíció. Az $\mathbb{R}^n$ euklideszi tér tetszőleges u és $v(\neq \underline{0})$ vektora esetén az u vektor v vektorra vett merőleges vetületén az

$$\frac{\langle u, v \rangle}{\langle v, v \rangle} \cdot v$$

vektort értjük. Ez a vektor egy egyenesbe esik a v-vel, és hosszúsága $||u|| \cdot \cos \alpha$, ahol α az u és v vektorok szöge.

36. Tétel (Gram-Schmidt-féle ortogonalizáció). *Euklideszi tér tetszőleges $u_1, \ldots, u_k$ lineárisan független vektorrenszere esetén van olyan $v_1, \ldots, v_k$ ortonormált vektorrendszer, amelyre $[u_1, \ldots, u_k] = [v_1, \ldots, v_k]$.*

37. Példa. Gram-Schmidt ortogonalizációt hajtunk végre $\mathbb{R}^4$-ben az $u_1 = (1, 1, -1, 1)$, $u_2 = (2, 1, -1, 0)$, $u_3 = (3, -1, 3, 1)$ vektorrendszeren. Legyen $v_1 = u_1 = (1, 1, -1, 1)$, a v_2 vektort úgy kapjuk, hogy az u_2 vektorból kivonjuk az u_2 vektor v_1-re vett merőleges vetületét (35. definíció). A v_3 vektor esetén a v_1 és a v_2 vektorokra vett merőleges vetületet is kivonjuk:

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 = (2, 1, -1, 0) - \frac{2+1+1+0}{1+1+1+1}(1, 1, -1, 1) = (1, 0, 0, -1),$$

$$v_3 = u_3 - \frac{\langle u_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 = (3, -1, 3, 1) - \frac{0}{4}(1, 1, -1, 1) - \frac{2}{2}(1, 0, 0, -1) = (2, -1, 3, 2).$$

A $v_1 = (1, 1, -1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0, -1)$ és $v_3 = (2, -1, 3, 2)$ vektorrendszer ortogonális, ha a v_i vektorokat elosztjuk a hosszukkal, akkor ortonormált vektorrendszert kapunk. Mivel $||v_1|| = 2$, $||v_2|| = \sqrt{2}$ és $||v_3|| = \sqrt{18}$, így az $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, $\left(\frac{2}{\sqrt{18}}, -\frac{1}{\sqrt{18}}, \frac{3}{\sqrt{18}}, \frac{2}{\sqrt{18}}\right)$ vektorok ortonormált vektorrendszert alkotnak.

38. Következmény. *Euklideszi tér bármely ortonormált vektorrendszere kiegészíthető ortonormált bázissá. Euklideszi térben van ortonormált bázis.*

39. Definíció. Az U és V euklideszi terek izomorfak, ha van olyan $\varphi : U \to V$ vektortér izomorfizmus, amely megtartja a belső szorzatot, azaz $\langle u\varphi, v\varphi \rangle = \langle u, v \rangle$ minden $u, v \in U$ esetén.

40. Tétel. *Bármely n-dimenziós euklideszi tér izomorf az $\mathbb{R}^n$ euklideszi térrel.*

41. Definíció. Legyen V euklideszi tér. Azt mondjuk, hogy a $\varphi : V \to V$ lienáris transzformáció szimmetrikus, ha minden $u, v \in V$ esetén $\langle u\varphi, v \rangle = \langle u, v\varphi \rangle$.

42. Tétel. *Euklideszi tér lineáris transzformációja akkor és csak akkor szimmetrikus, ha mátrixa valamely (bármely) ortonormált bázisban szimmetrikus.*

43. Tétel. *Euklideszi tér bármely szimmetrikus lineáris transzformációjának van sajátértéke.*

44. Tétel. *Euklideszi tér tetszőleges φ szimmetrikus lineáris transzformációja esetén az euklideszi térnek van φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisa. Ebben a bázisban φ mátrixa diagonális, ahol a főátlóban rendre a bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek állnak.*

45. Példa. Legyen a $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ szimmetrikus lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Meghatározzuk az $\mathbb{R}^3$ egy φ sajátvektoraiból álló ortonormált bázisát. Először meghatározzuk φ sajátértékeit. Az $|A - xE|$ determinánst az utolsó oszlopa szerint kifejtve kapjuk, hogy a karakterisztikus polinom:

$$f_A(x) = |A - xE| = \begin{vmatrix} 3-x & 3 & 0 \\ 3 & -5-x & 0 \\ 0 & 0 & 4-x \end{vmatrix} = (4-x)[(3-x)(-5-x)-9] = (4-x)(x-4)(x+6).$$

Az $f_A(x)$ polinom valós gyökei, azaz a φ sajátértékei a $\lambda_1 = 4$ és a $\lambda_2 = -6$ skalárok. Meghatározzuk a $\lambda_1 = 4$ sajátértékhez tartozó sajátalteret. A következő homogén lineáris egyenletrendszer megoldásai alkotják a $\lambda_1 = 4$-hez tartozó sajátalteret:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 3 & -9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 3x_2 & 3x_1 - 9x_2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Mivel a második egyenlet az első (-3)-szorosa, így elég figyelembe venni a $-x_1 + 3x_2 = 0$ összefüggést, amiből $x_1 = 3x_2$, azaz x_1 kötött ismeretlen, x_2 és x_3 pedig szabad. A megoldástér egy bázisát úgy kapjuk, hogy a szabad változókba behelyettesítjük a 0 és 1 értékeket úgy, hogy mindig egy szabad változó kapjon 1 értéket. Az így kapott $(3, 1, 0)$ és $(0, 0, 1)$ vektorok alkotják a $\lambda_1 = 4$-hez tartozó sajátaltér egy bázisát.
A $\lambda_2 = -6$-hoz tartozó sajátaltér hasonlóképpen számítható, egy bázisa az $(1, -3, 0)$ vektor.
A $(3, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(1, -3, 0)$ vektorrendszer a φ lineáris transzformáció sajátvektoraiból álló bázist alkot $\mathbb{R}^3$-ben, és ez a vektorrendszer ortogonális is. Ahhoz, hogy ortonormált bázist alkosson a vektorok hosszával kell leosztani, így kapjuk a $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right)$, $(0, 0, 1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)$ ortonormált bázist, mely a φ lineáris transzformáció sajátvektoraiból áll.

46. Következmény. *Bármely A valós szimmetrikus mátrixhoz megadható olyan P ortogonális mátrix, amelyre $P^{-1}AP$ diagonális.*

47. Példa. Megadunk az alábbi A valós szimmetrikus mátrixhoz egy olyan P ortogonális mátrixot, amelyre $P^{-1}AP$ diagonális.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 3 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ez a mátrix a 45. példában szereplő φ lineáris transzformáció mátrixa a standard bázisban. Abban példában megadtunk egy sajátvektorokból álló ortonormált bázist, a 44. tétel alapján abban a bázisban a φ mátrixa diagonális. Ha a 45. példában meghatározott ortonormált bázis vektorait beírjuk egy mátrix oszlopaiba, akkor éppen a keresett P mátrixot kapjuk:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{10}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{10}} \\ \frac{1}{\sqrt{10}} & 0 & -\frac{3}{\sqrt{10}} \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

A $P^{-1}AP$ diagonális mátrix főátlójában rendre a bázisvektorokhoz tartozó sajátértékek állnak:

$$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{pmatrix}.$$

48. Tétel (Kvadratikus alakok főtengelytétele). *Euklideszi térben bármely kvadratikus alakhoz megadható az euklideszi tér olyan ortonormált bázisa, amelyben a kvadratikus alak kanonikus alakú.*

49. Példa. A $q : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $q(u) = 3x_1^2 + 6x_1x_2 - 5x_2^2 + 4x_3^2$ kvadratikus alakhoz tartozó ortonormált bázis, amelyben a q kanonikus alakú, a 45. példában megadott $\left(\frac{3}{\sqrt{10}}, \frac{1}{\sqrt{10}}, 0\right)$, $(0,0,1)$, $\left(\frac{1}{\sqrt{10}}, -\frac{3}{\sqrt{10}}, 0\right)$ bázis, ugyanis a q mátrixa a standard bázisban éppen az A mátrix. A 44. tétel alapján ebben a bázisban a q mátrixa diagonális, és a főátlóban a sajátértékek szerepelnek. Így q kanonikus alakja ebben a bázisban $q(v) = 4y_1^2 + 4y_2^2 - 6y_3^2$, ami alapján q indefinit.