MBNK12: Relációk és műveletek

(előadásvázlat, 2019. március 28.)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát, $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m \times n$-es valós mátrixok halmazát, és $\mathbb{Z}_m$ a modulo m maradékosztályok halmazát.

1. Osztályozás és ekvivalenciareláció

1. Definíció. Tetszőleges A halmazra $\mathcal{P}(A)$ egy $\mathcal{C}$ részhalmazát az A osztályozásának vagy partíciójának nevezzük, ha a $\mathcal{C}$-beli halmazok

(1) nem üresek,
(2) egyesítésük A (azaz minden elem benne van egy osztályban), és
(3) páronként diszjunktak.

A $\mathcal{C}$-beli halmazokat osztályoknak vagy blokkoknak nevezzük.

2. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és keressük meg A összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$-beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani három egyelemű osztályra ($3 = 1 + 1 + 1$), vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra ($3 = 2 + 1$), vagy egyetlen 3-elemű osztályra ($3 = 3$). Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A-nak:

(1) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$,
(2) $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$,
(3) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$,
(4) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, vagy
(5) $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}\}$.

3. Példa. A modulo m maradékosztályok definíciójában azt mondtuk, hogy

$$\overline{a} = \{\, b \in \mathbb{Z} : b \equiv a \pmod{m} \,\},$$

és a maradékosztályok halmaza $\mathbb{Z}_m = \{\overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$. Vegyük észre, hogy minden $\overline{a}$ maradékosztály részhalmaza $\mathbb{Z}$-nek, és ezek diszjunkt uniója éppen $\mathbb{Z}$. Tehát $\mathbb{Z}_m$ az egész számok egy osztályozása.

4. Példa. Vegyük azt az osztályozását $\mathbb{Z}$-nek, melyben az azonos abszolutértékű számok kerülnek egy osztályba. Ekkor a $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \dots\}$ osztályozását kapjuk, melynek csak egyetlen egy egyelemű osztálya van, minden más osztálya kételemű.

5. Definíció. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozása az A halmaznak. Ekkor az $a \in A$ elem osztályán azt a $B \in \mathcal{C}$ osztályt értjük, amelyre $a \in B$, és ezt az osztályt $\overline{a}$-val jelöljük.

6. Példa. A 2. példa $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ osztályozására $\overline{1} = \{1, 2\}$, $\overline{2} = \{1, 2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. A 3. példában megadott $\overline{a}$ éppen az a elem osztálya, azaz az előző definícióban megadott jelölés ugyan azt adja mint ahogy a maradékosztályokat definiáltuk. A 4. példában $\overline{0} = \{0\}$ és $\overline{1} = \{-1, 1\}$.

7. Definíció. Tetszőleges A halmazra az $A \times A$ halmaz részhalmazait relációknak nevezzük. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) reflexív, ha minden $a \in A$ elemre $(a, a) \in \varrho$;
(2) szimmetrikus, ha tetszőleges $(a, b) \in \varrho$ elempárra $(b, a) \in \varrho$; és
(3) tranzitív, ha tetszőleges $(a, b), (b, c) \in \varrho$ elempárokra $(a, c) \in \varrho$.

A relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

8. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon tekintsük a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq A \times A$ relációt. Ez reflexív, mert $(1, 1)$, $(2, 2)$ és $(3, 3)$ is eleme ϱ-nak. Szimmetrikus is, mert például az $(1, 2) \in \varrho$ elempárt tekinte látjuk, hogy $(2, 1)$ is eleme ϱ-nak; vagy ha az $(1, 1) \in \varrho$ elempárt tekintjük, akkor a $(1, 1) \in \varrho$. Hasonlóan látható, hogy ϱ tranzitív is, ezért ϱ ekvivalenciareláció.

9. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ reláció nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \varrho$. A reláció szimmetrikus, viszont nem tranzitív, mert $(1, 2), (2, 1) \in \varrho$ de $(1, 1) \notin \varrho$.

10. Tétel. Tetszőleges $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozásra a

$$\varrho = \{\, (a, b) \in A \times A : \overline{a} = \overline{b} \,\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

11. Példa. A 4. példában megadott osztályozáshoz a

$$\begin{aligned}\varrho = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1), (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2), \dots\}\\ = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| = |b|\,\}\end{aligned}$$

ekvivalenciareláció tartozik.

12. Definíció. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció. Az $a \in A$ elem osztálya alatt az

$$\overline{a} = \{\, b \in A : (a, b) \in \varrho \,\}$$

halmazt értjük. Definiáljuk a $A/\varrho = \{\overline{a} \in \mathcal{P}(A) : a \in A\,\}$ halmazt, melyet a ϱ ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozásnak vagy az A halmaz ϱ szerinti faktorhalmazának nevezünk.

13. Példa. Tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $\overline{1} = \{\, b \in A : (1, b) \in \varrho \,\} = \{1, 2\}$. Hasonlóan $\overline{2} = \{1, 2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. Tehát definíció szerint

$$A/\varrho = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3\}\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

ami osztályozása A-nak.

14. Tétel. Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ϱ osztályozása A-nak.

15. Tétel. Legyen $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, ϱ a 10. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció, és $\mathcal{C}' = A/\varrho$ a 14. tétel szerint származtatott osztályozás. Ekkor $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, azaz visszakaptuk az eredeti osztályozást.

16. Tétel. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, $\mathcal{C} = A/\varrho$ a 14. tétel szerint származtatott osztályozás, és ϱ' a 10. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció. Ekkor $\varrho = \varrho'$, azaz visszakaptuk az eredeti ekvivalenciarelációt.

17. Következmény. Rögzített A halmazon az osztályozások és ekvivalenciarelációk kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, azaz ugyanannyian vannak.

18. Definíció. Tetszőleges A halmazon a $\Delta_A = \{\, (a, b) \in A \times A : a = b \,\}$ ekvivalenciarelációt egyenlőségrelációnak, a $\nabla_A = A \times A$ ekvivalenciarelációt teljes relációnak nevezzük.

19. Definíció. A $\varphi\colon A \to C$ leképezés magja a

$$\ker \varphi = \{\, (a, b) \in A \times A : a\varphi = b\varphi \,\}$$

reláció az A halmazon.

20. Tétel. Tetszőleges $\varphi\colon A \to C$ leképezésre $\ker \varphi$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Továbbá φ akkor és csak akkor injektív, ha $\ker \varphi = \Delta_A$.

21. Megjegyzés. A lineáris algebrából tanult mag és a fenti definíció szoros kapcsolatban vannak. Adott U, V vektorterek közötti $\varphi\colon U \to V$ lineáris leképezés magján a következő halmazt értettük:

$$\operatorname{Ker} \varphi = \{u \in U : u\varphi = 0\}.$$

Gondoljuk meg, hogy $(u_1, u_2) \in \ker \varphi$ pontosan akkor teljesül, ha $u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker} \varphi$.

2. Részbenrendezés és Hasse-diagram

22. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) antiszimmetrikus, ha bármely $a, b \in A$ elemre ha $(a, b), (b, a) \in \varrho$, akkor $a = b$ (azaz $\rho \cap \rho^{-1} \subseteq \Delta_A$);
(2) dichotóm, ha bármely $a, b \in A$ elemre $(a, b) \in \varrho$ vagy $(b, a) \in \varrho$.

A ϱ reláció részbenrendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, ekkor az $(A; \varrho)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük. A ϱ reláció (lineáris) rendezés, ha részbenrendezés és dichotóm.

23. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés, mert $(2, 3), (3, 2) \notin \varrho$.

24. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciareláció nem részbenrendezés, mert $(1, 2), (2, 1) \in \varrho$ és $1 \neq 2$.

25. Példa. A nemnegatív egészek $\mathbb{N}_0$ halmazán az oszthatóság reláció részbenrendezés, de nem rendezés. Az egészek halmazán az oszthatóság reláció nem részbenrendezés, mert nem antiszimmetrikus: $1 \mid -1$ és $-1 \mid 1$.

26. Példa. Tetszőleges A halmazra a $\mathcal{P}(A)$ hatványhalmazon a $\subseteq$ részhalmaz reláció részbenrendezés. $\mathcal{P}(A)$ tetszőleges részhalmaza a tartalmazásra nézve részbenrendezés.

27. Példa. Legyen A rögzített halmaz, és tekintsük az összes ekvivalenciareláció halmazát A-n:

$$\mathrm{Equ}(A) = \{\, \varrho \subseteq A \times A : \varrho \text{ ekvivalenciareláció} \,\}.$$

Ekkor $\mathrm{Equ}(A)$-n a részhalmaz reláció részbenrendezés.

28. Definíció. Azt mondjuk, hogy az a és b elemek összehasonlíthatók a $\leq$ részbenrendezésben, ha $a \leq b$ vagy $b \leq a$. Tehát egy részbenrendezés pontosan akkor dichotóm, ha bármely két eleme összehasonlítató.

29. Példa. A 12 pozitív osztóinak halmazán az oszthatóság részbenrendezésben 2 és 3 nem összehasonlítható, míg 2 és 6 igen.

30. Definíció. Legyen ϱ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértésre, akkor $(a, b) \in \varrho$ helyett $a \leq b$-t írunk, és a $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem fedi az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$-vel jelöljük, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$ hogy $a < c < b$.

31. Megjegyzés. A részbenrendezéseket úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt rajzoljuk be, mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a-t lejjebb rajzoljuk, mint b-t. Ekkor a $d \leq e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d-ből e-be néhány közbülső $c_1, \ldots, c_n$ elemen keresztül, azaz $d \prec c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_n \prec e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés Hasse-diagramjának nevezzük.

32. Példa. Vegyük a 12 pozitív osztóinak halmazát az oszthatóság részbenrendezéssel. Ekkor összesen 7 fedő pár van:

$$1 \prec 2, \quad 1 \prec 3, \quad 2 \prec 4, \quad 2 \prec 6, \quad 3 \prec 6, \quad 4 \prec 12, \quad 6 \prec 12,$$

azaz a Hasse-diagram 6 pontból és 7 élből áll.

33. Példa. A racionális számok halmazán a szokásos $\leq$ rendezésben nincsen fedő pár.

34. Tétel. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A véges halmazon. Ekkor a részbenrendezést a fedési reláció (azaz a Hasse-diagram) egyértelműen meghatározza.

35. Definíció. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon.

(1) Az $m \in A$ elem maximális, ha nincs olyan $a \in A$ hogy $m < a$.
(2) Az $m \in A$ elem minimális, ha nincs olyan $a \in A$ hogy $m > a$.
(3) Az $m \in A$ elem legnagyobb elem, ha minden $a \in A$ elemre $a \leq m$.
(4) Az $m \in A$ elem legkisebb elem, ha minden $a \in A$ elemre $a \geq m$.

36. Példa. Egy részbenrendezésnek lehet több maximális és minimális elem is, és az is előfordulhat hogy nincs maximális vagy minimális elem. Például az $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \}$ halmazon az oszthatóság részbenrendezés, amelynek nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.

37. Tétel. Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.

38. Tétel. Egy részbenrendezésnek legfeljebb egy legnagyobb és egy legkisebb eleme lehet.

39. Tétel. Minden legkisebb elem minimális, és minden legnagyobb elem maximális egy részbenrendezett halmazban.

40. Tétel. Ha ϱ és σ tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus) relációk az A halmazon, akkor $\varrho \cap \sigma$ is tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus).

41. Megjegyzés. A fenti állítás tetszőlegesen sok reláció metszetére is igaz (és ugyanúgy bizonyítható).

42. Következmény. Ekvivalenciarelációk metszete is ekvivalenciareláció, és részbenrendezések metszete is részbenrendezés.

43. Tétel. A $\varrho \subseteq A \times A$ akkor és csak akkor tranzitív, ha $\varrho\varrho \subseteq \varrho$ ahol a szorzás a megfeleltetés szorzás.

44. Definíció. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. A ϱ tranzitív lezártja alatt azt a legszűkebb $\hat{\varrho}$ tranzitív relációt értjük, amelyre $\varrho \subseteq \hat{\varrho}$.

45. Tétel. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ tetszőleges reláció. Ekkor

(1) $\hat{\varrho} = \bigcap \{ \sigma : \varrho \subseteq \sigma \text{ és } \sigma\sigma \subseteq \sigma \}$, azaz $\hat{\varrho}$ a ϱ-t tartalmazó tranzitív relációk metszete,
(2) $\hat{\varrho} = \varrho \cup \varrho\varrho \cup \varrho\varrho\varrho \cup \cdots = \bigcup \{ \varrho^n : n \in \mathbb{N} \}$,
(3) $\hat{\varrho} = \{ (a,b) \in A \times A : (\exists n \in \mathbb{N}_0)(\exists c_1, \ldots, c_n \in A) \text{ hogy } (a, c_1), (c_1, c_2), \ldots, (c_n, b) \in \varrho \}$,

46. Példa. Ha $A = \{1,2,3\}$ és $\varrho = \{(1,2),(2,1),(2,3)\}$, akkor $\varrho\varrho = \{(1,1),(1,3),(2,2)\}$. Tehát $\varrho \cup \varrho\varrho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3)\}$ már tranzitív és ez lesz a tranzitív lezárt.

47. Megjegyzés. Hasonlóképpen lehet definiálni egy ρ reláció reflexív lezártját és a szimmetrikus lezártját, mint a legszűkebb ρ-t tartalmazó relfexív (szimmetrikus) relációt. Az antiszimmetrikus lezárttal az a probléma, hogy ha ρ nem antiszimmetrikus, akkor semmilyen őt tartalmazó reláció sem lesz az.

3. Műveleti tulajdonságok

48. Jelölés. Legyen A egy tetszőleges halmaz, jelölje A^n az n-tényezős $A \times A \times \cdots \times A$ Descartes-szorzatot.

49. Definíció. Legyen A tetszőleges nemüres halmaz, és $n \in \mathbb{N}_0$. Az A-n értelmezett n-változós műveleten egy $A^n \to A$ leképezést értünk, n-et a művelet változószámának (aritásának) nevezzük.

50. Megjegyzés. Az előző definíció $n = 0$ esetén egy elem kijelölését jelenti az A halmazból.

51. Definíció. Legyen A tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{F}$ pedig jelölje az A-n értelmezett műveletek egy halmazát, ekkor az $(A; \mathcal{F})$ párt algebrának nevezzük.

52. Példa. Ha az előző definícióban szereplő $\mathcal{F}$ véges halmaz, akkor elemeit felsoroljuk a halmaz jelet elhagyva, például algebrák a következők: $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}; -)$, $(\mathbb{N}; 1, \cdot)$, $(\mathbb{R}^3; +)$, $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$, $(\mathbb{Z}; \min, \max)$, $(\mathbb{N}; \mathrm{lnko}, \mathrm{lkkt})$, $(\mathbb{Z}_{12}; +, \cdot)$, $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \emptyset, \bar{\ }, \cap, \cup, \triangle)$, $(S_n; \cdot)$, $(S_n; \mathrm{id}, \cdot)$.

53. Definíció. Azokat az algebrákat, amelyeknek egy kétváltozós művelete van grupoidnak nevezzük.

54. Példa. A 52. példában megadott algebrák közül a következők grupoidok: $(\mathbb{Z}; -)$, $(\mathbb{R}^2; +)$, $(S_n; \cdot)$.

55. Definíció. (Grupoid műveleti tulajdonságai)

(1) Az $(A;\circ)$ grupoid idempotens, ha $(\forall a\in A)(a\circ a=a)$.
(2) Az $(A;\circ)$ grupoid asszociatív, ha $(\forall a,b,c\in A)\big(a\circ(b\circ c)=(a\circ b)\circ c\big)$.
(3) Az $(A;\circ)$ grupoid kommutatív, ha $(\forall a,b\in A)(a\circ b=b\circ a)$.
(4) Az $(A;\circ)$ grupoidban van zéruselem, ha $(\exists o\in A)(\forall a\in A)(a\circ o=o\circ a=o)$.
(5) Az $(A;\circ)$ grupoidban van egységelem, ha $(\exists e\in A)(\forall a\in A)(a\circ e=e\circ a=a)$.
(6) Ha az $(A;\circ)$ grupoidban e egységelem, és $(\forall a\in A)(\exists b\in A)(a\circ b=b\circ a=e)$, akkor minden elemnek van inverze.

56. Tétel. Bármely grupoidban legfeljebb egy egységelem és legfeljebb egy zéruselem van.

57. Definíció. Ha a grupoidnak van egységeleme, egységelemes, ha van zéruseleme, zéruselemes grupoidnak nevezzük.

58. Példa. Olyan grupoidokra adunk példát, melyek a 55. definícióban szereplő tulajdonságokkal rendelkeznek.

(1) Idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z};\min),(\mathbb{N};\text{lkkt}),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee),(\mathcal{P}(U);\cap)$.
(2) Asszociatív grupoidok: $(\mathbb{N};\cdot),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\mathbb{N};\text{lnko}),(\mathbb{Z};\max),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$, $(\mathcal{P}(U);\cup),(\mathcal{P}(U);\triangle),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(3) Kommutatív grupoidok: $(\mathbb{N};\cdot),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{N};\text{lnko}),(\mathbb{Z};\max),(\mathbb{Z}_4;+),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$, $(\mathcal{P}(U);\cup),(\mathcal{P}(U);\triangle)$.
(4) Zéruselemes grupoidok: $(\mathbb{Z};\cdot)$ zéruseleme a 0, $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$ zéruselme a 2×2-es zérómátrix, $(\mathbb{N};\text{lnko})$ zéruselme az 1, $(\mathbb{Z}_4;\cdot)$ zéruseleme a $\overline{0}$, $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ zéruseleme a $\mathbf{h}$, $(\mathcal{P}(U);\cup)$ zéruselme az U.

grupoid	zéruselem
$(\mathbb{Z};\cdot)$	0
$(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$
$(\mathbb{N};\text{lnko})$	1
$(\mathbb{Z}_3;\cdot)$	$\overline{0}$
$\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$	$\mathbf{h}$
$\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee)$	$\mathbf{i}$
$(\mathcal{P}(U);\cap)$	$\emptyset$
$(\mathcal{P}(U);\cup)$	U

(5) Egységelemes grupoidok: $(\mathbb{Z};\cdot)$ egységeleme az 1, $(\mathbb{Z};+)$ egységeleme a 0, $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$ egységelme a 2×2-es egységmátrix, $(\mathbb{Z}_4;\cdot)$ egységeleme az $\overline{1}$, $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ egységeleme az $\mathbf{i}$, $(\mathcal{P}(U);\cup)$ egységelme az $\emptyset$, $(\mathcal{P}(U);\triangle)$ egységeleme az $\emptyset$, $(S_n;\cdot)$ egységeleme az id.

grupoid	egységelem
$(\mathbb{Z};\cdot)$	1
$(\mathbb{Z};+)$	0
$(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$
$(\mathbb{Z}_3;\cdot)$	$\overline{1}$
$(\mathbb{Z}_4;+)$	$\overline{0}$
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$	$\mathbf{i}$
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$	$\mathbf{i}$
$(\mathcal{P}(U);\cup)$	$\emptyset$
$(\mathcal{P}(U);\triangle)$	$\emptyset$
A^A	id_A
$(S_n;\cdot)$	id

(6) Egységelmeles grupoidok, ahol minden elemnek van inverze: $(\mathbb{Z};+)$-ban az a inverze $-a$, $(\mathbb{R}^3;+)$-ban a v inverze $-v$, $(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$-ban a inverze $1/a$, $(\mathbb{Z}_4;+)$-ban a $\overline{0}$ és a $\overline{2}$ inverze önmaga, a $\overline{3}$ és $\overline{1}$ egymás inverzei, $(\mathbb{Z}_3\setminus\{\overline{0}\};\cdot)$-ban minden elem inverze önmaga, $(\mathcal{P}(U);\triangle)$-ban minden elem inverze önmaga, $(S_n;\cdot)$-ben π inverze π^{-1}.

grupoid	a inverze
$(\mathbb{Z};+)$	$-a$
$(\mathbb{R}^3;+)$	$-a$
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$	$\frac{1}{a}$
$(\mathbb{Z}_3\setminus\{\overline{0}\};\cdot)$	a
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$	a
$(\mathcal{P}(U);\triangle)$	a
$(S_n;\cdot)$	a^{-1}

59. Példa. Olyan grupoidokra adunk példát, melyek NEM rendelkeznek a 55. definícióban szereplő tulajdonságokkal.

(1) Nem idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\mathbb{Z}_4;+),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(2) Nem asszociatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.
(3) Nem kommutatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(4) Grupoidok, ahol nincs zéruselem: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Z};+),(\mathbb{N};\cdot),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{Z}_4;+),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(S_n;\cdot)$.
(5) Grupoidok, ahol nincs egységelem: $(\mathbb{N};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.
(6) Egységelemes grupoidok, ahol nincs minden elemnek inverze: $(\mathbb{N}_0;+),(\mathbb{Z};\cdot),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),$ $(\mathbb{Z}_3;\cdot),(\mathbb{Z}_4;\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee),(\mathcal{P}(U);\cap),(\mathcal{P}(U);\cup),(A^A;\cdot)$.

60. Definíció. Legyen $\circ$ és $\star$ két kétváltozó művelet az A halmazon.

(1) A $\circ$ disztributív a $\star$-ra nézve, ha $(\forall a,b,c\in A)((a\circ(b\star c)=(a\circ b)\star(a\circ c))\wedge((b\star c)\circ a=(b\circ a)\star(c\circ a)))$.
(2) A $\circ$ abszorptív a $\star$-ra nézve, ha $(\forall a,b\in A)\big((a\circ(a\star b)=a)\wedge((a\star b)\circ a=a)\big)$.

61. Példa. Az előző definícióban szereplő fogalmakra adunk példát.

(1) Az $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ halmazon a $\cdot$ disztributív a $+$-ra. Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko disztributív a lkkt-re, és a lkkt is disztributív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ disztributív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is disztributív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ disztributív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is disztributív a $\cap$-ra, továbbá a $\cap$ disztributív a $\triangle$-ra.
(2) Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko abszorptív a lkkt-re, és a lkkt is abszorptív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ abszorptív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is abszorptív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ abszorptív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is abszorptív a $\cap$-ra.