MBLK12: Relációk (levelező)

(előadásvázlat)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát, és $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m \times n$-es valós mátrixok halmazát.

1. Osztályozás és ekvivalenciareláció

1. Definíció. Tetszőleges A halmazra $\mathcal{P}(A)$ egy $\mathcal{C}$ részhalmazát az A osztályozásának vagy partíciójának nevezzük, ha a $\mathcal{C}$-beli halmazok

(1) nem üresek,
(2) egyesítésük A, és
(3) páronként diszjunktak.

A $\mathcal{C}$-beli halmazokat osztályoknak vagy blokkoknak nevezzük.

2. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és keressük meg A összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$-beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani három egyelemű osztályra ($3 = 1 + 1 + 1$), vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra ($3 = 2 + 1$), vagy egyetlen 3-elemű osztályra ($3 = 3$). Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A-nak:

(1) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$,
(2) $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$,
(3) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$,
(4) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, vagy
(5) $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}\}$.

3. Definíció. Az a egész szám modulo m maradékosztályán az $\overline{a} = \{\, b \in \mathbb{Z} \colon b \equiv a \pmod m \,\}$ halmazt értjük. A modulo m maradékosztályok halmazát $\mathbb{Z}_m$ jelöli, azaz $\mathbb{Z}_m = \{\, \overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1} \}$.

4. Példa. A 3. definícióban megadott összes $\overline{a}$ maradékosztály részhalmaza $\mathbb{Z}$-nek, és ezek diszjunkt uniója éppen $\mathbb{Z}$. Tehát $\mathbb{Z}_m$ az egész számok egy osztályozása.

5. Példa. Vegyük azt az osztályozását $\mathbb{Z}$-nek, melyben az azonos abszolutértékű számok kerülnek egy osztályba. Ekkor a $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \dots\}$ osztályozását kapjuk, melynek csak egyetlen egy egyelemű osztálya van, minden más osztálya kételemű.

6. Definíció. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozása az A halmaznak. Ekkor az $a \in A$ elem osztályán azt a $B \in \mathcal{C}$ osztályt értjük, amelyre $a \in B$, és ezt az osztályt $\overline{a}$-val jelöljük.

7. Példa. A 2. példa $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ osztályozására $\overline{1} = \{1, 2\}$, $\overline{2} = \{1, 2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. A 3. definícióban megadott $\overline{a}$ éppen az a elem osztálya, azaz az előző definícióban megadott jelölés ugyanazt adja mint ahogy a maradékosztályokat definiáltuk. A 5. példában $\overline{0} = \{0\}$ és $\overline{1} = \{-1, 1\}$.

8. Definíció. Tetszőleges A halmazra az $A \times A$ halmaz részhalmazait relációknak nevezzük. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) reflexív, ha $(\forall a \in A)(a, a) \in \varrho$;
(2) szimmetrikus, ha $(\forall a, b \in A)\big((a, b) \in \varrho \to (b, a) \in \varrho\big)$; és
(3) tranzitív, ha $(\forall a, b, c \in A)\big(((a, b) \in \varrho \wedge (b, c) \in \varrho) \to (a, c) \in \varrho\big)$.

A relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

9. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon tekintsük a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq A \times A$ relációt. Ez reflexív, mert $(1, 1)$, $(2, 2)$ és $(3, 3)$ is eleme ϱ-nak. Szimmetrikus is, mert például az $(1, 2) \in \varrho$ elempárt tekinte látjuk, hogy $(2, 1)$ is eleme ϱ-nak; vagy ha az $(1, 1) \in \varrho$ elempárt tekintjük, akkor a $(1, 1) \in \varrho$. Hasonlóan látható, hogy ϱ tranzitív is, ezért ϱ ekvivalenciareláció.

10. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ reláció nem reflexív, mert $(1,1) \notin \varrho$. A reláció szimmetrikus, viszont nem tranzitív, mert $(1,2),(2,1) \in \varrho$ de $(1,1) \notin \varrho$.

11. Tétel. Tetszőleges $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozásra a

$$\varrho = \{\, (a,b) \in A \times A : \overline{a} = \overline{b} \,\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

12. Példa. A 5. példában megadott osztályozáshoz a

$$\begin{aligned}\varrho = \{(0,0),(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,-1),(2,2),(2,-2),(-2,2),(-2,-2),\dots\} \\ = \{(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| = |b|\,\}\end{aligned}$$

ekvivalenciareláció tartozik.

13. Definíció. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció. Az $a \in A$ elem osztálya alatt az

$$\overline{a} = \{\, b \in A : (a,b) \in \varrho \,\}$$

halmazt értjük. Definiáljuk a $A/\varrho = \{\overline{a} \in \mathcal{P}(A) : a \in A\,\}$ halmazt, melyet a ϱ ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozásnak vagy az A halmaz ϱ szerinti faktorhalmazának nevezünk.

14. Példa. Tekintsük az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $\overline{1} = \{\, b \in A : (1,b) \in \varrho \,\} = \{1,2\}$. Hasonlóan $\overline{2} = \{1,2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. Tehát definiíció szerint

$$A/\varrho = \{\overline{1},\overline{2},\overline{3}\} = \{\{1,2\},\{1,2\},\{3\}\} = \{\{1,2\},\{3\}\},$$

ami osztályozása A-nak.

15. Tétel. Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ϱ osztályozása A-nak.

16. Tétel. Legyen $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, ϱ a 11. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció, és $\mathcal{C}' = A/\varrho$ a 15. tétel szerint származtatott osztályozás. Ekkor $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, azaz visszakaptuk az eredeti osztályozást.

17. Tétel. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, $\mathcal{C} = A/\varrho$ a 15. tétel szerint származtatott osztályozás, és ϱ' a 11. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció. Ekkor $\varrho = \varrho'$, azaz visszakaptuk az eredeti ekvivalenciarelációt.

18. Következmény. Rögzített A halmazon az osztályozások és ekvivalenciarelációk kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, azaz ugyanannyian vannak.

19. Definíció. Tetszőleges A halmazon a $\Delta_A = \{\, (a,b) \in A \times A : a = b \,\}$ ekvivalenciarelációt egyenlőségrelációnak, a $\nabla_A = A \times A$ ekvivalenciarelációt teljes relációnak nevezzük.

20. Definíció. A $\varphi\colon A \to B$ leképezés magja a

$$\ker\varphi = \{\, (a_1,a_2) \in A \times A : a_1\varphi = a_2\varphi \,\}$$

reláció az A halmazon.

21. Tétel. Tetszőleges $\varphi\colon A \to B$ leképezésre $\ker\varphi$ ekvivalenciareláció az A halmazon. Továbbá φ akkor és csak akkor injektív, ha $\ker\varphi = \Delta_A$.

22. Példa. A $\varphi\colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $x\varphi = |x|$ leképezésnél $\ker\varphi = \{(a,b) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}\colon |a| = |b|\}$ ekvivalenciareláció, amelyhez tartozó osztályozás megegyezik az 5. példában megadottal.

23. Megjegyzés. A lineáris algebrából tanult mag és az előző definíció szoros kapcsolatban vannak. Adott U, V vektorterek közötti $\varphi\colon U \to V$ lineáris leképezés magján a következő halmazt értettük:

$$\operatorname{Ker}\varphi = \{u \in U : u\varphi = 0\}.$$

Gondoljuk meg, hogy $(u_1,u_2) \in \ker\varphi$ pontosan akkor teljesül, ha $u_1 - u_2 \in \operatorname{Ker}\varphi$.

2. Részbenrendezés és Hasse-diagram

24. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) antiszimmetrikus, ha $(\forall a, b \in A)\big(((a,b) \in \varrho \wedge (b,a) \in \varrho) \to a = b\big)$;
(2) dichotom, ha $(\forall a, b \in A)\big((a,b) \in \varrho \vee (b,a) \in \varrho\big)$.

A ϱ reláció részbenrendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, ekkor az $(A;\varrho)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük. A ϱ reláció (lineáris) rendezés, ha részbenrendezés és dichotom.

25. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(3,3)\}$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés, mert $(2,3),(3,2) \notin \varrho$.

26. Példa. Az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(3,3)\}$ ekvivalenciareláció nem részbenrendezés, mert $(1,2),(2,1) \in \varrho$ és $1 \neq 2$.

27. Példa. A nemnegatív egészek $\mathbb{N}_0$ halmazán az oszthatóság reláció részbenrendezés, de nem rendezés. Az egészek halmazán az oszthatóság reláció nem részbenrendezés, mert nem dichotom: $1 \mid -1$ és $-1 \mid 1$.

28. Példa. Tetszőleges A halmazra a $\mathcal{P}(A)$ hatványhalmazon a $\subseteq$ részhalmaz reláció részbenrendezés. $\mathcal{P}(A)$ tetszőleges részhalmaza a tartalmazásra nézve részbenrendezés.

29. Példa. Legyen A rögzített halmaz, és tekintsük az összes ekvivalenciareláció halmazát A-n:

$$\mathrm{Equ}(A) = \{\, \varrho \subseteq A \times A : \varrho \text{ ekvivalenciareláció} \,\}.$$

Ekkor $\mathrm{Equ}(A)$-n a részhalmaz reláció részbenrendezés.

30. Definíció. Legyen ϱ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértésre, akkor $(a,b) \in \varrho$ helyett $a \leq b$-t írunk, és a $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem fedi az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$-vel jelöljök, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$ hogy $a < c < b$.

31. Megjegyzés. A részbenrendezéseket úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt rajzoljuk be mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a-t lejebb rajzoljuk, mint b-t. Ekkor a $d \leq e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d-ből e-be néhány közbülső $c_1, \ldots, c_n$ elemen keresztül, azaz $d \prec c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_n \prec e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés Hasse-diagramjának nevezzük.

32. Példa. Vegyük a 12 pozitív osztóinak halmazát az oszthatóság részbenrendezéssel. Ekkor összesen 7 fedő pár van:

$$1 \prec 2, \quad 1 \prec 3, \quad 2 \prec 4, \quad 2 \prec 6, \quad 3 \prec 6, \quad 4 \prec 12, \quad 6 \prec 12,$$

azaz a Hasse-diagram 6 pontból és 7 élből áll.

33. Példa. A racionális számok halmazán a szokásos $\leq$ rendezésben nincsen fedő pár.

34. Tétel. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A véges halmazon. Ekkor a részbenrendezést a fedési reláció (azaz a Hasse-diagram) egyértelműen meghatározza.

35. Definíció. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon.

(1) Az $m \in A$ elem maximális, ha nincs olyan $a \in A$ hogy $m < a$.
(2) Az $m \in A$ elem minimális, ha nincs olyan $a \in A$ hogy $m > a$.
(3) Az $m \in A$ elem legnagyobb elem, ha minden $a \in A$ elemre $a \leq m$.
(4) Az $m \in A$ elem legkisebb elem, ha minden $a \in A$ elemre $a \geq m$.

36. Példa. Egy részbenrendezésnek lehet több maximális és minimális elem is, és az is előfordulhat hogy nincs maximális vagy minimális elem. Például az $A = \{\, n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \,\}$ halmazon az oszthatóság részbenrendezés, amelynek nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.

37. Tétel. Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.

38. Tétel. Egy részbenrendezésnek legfeljebb egy legnagyobb és egy legkisebb eleme lehet.

39. Tétel. Ha ϱ és σ tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus) relációk az A halmazon, akkor $\varrho \cap \sigma$ is tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus).