MBNK12: Permutációk

(előadásvázlat, 2019. március 12.)

Maróti Miklós

1. Definíció. Az A halmaz permutációin a $\pi : A \to A$ bijektív leképezéseket értjünk. Tetszőleges n pozitív egészre az $\{1, \dots, n\}$ halmaz összes permutációinak halmazát S_n-nel jelöljük.

2. Jelölés. A $\pi \in S_n$ permutációt megadhatjuk kétsoros írásmóddal

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ 1\pi & 2\pi & \cdots & n\pi \end{pmatrix},$$

vagy elempárok halmazaként:

$$\pi = \{(1, 1\pi),\ (2, 2\pi),\ \dots,\ (n, n\pi)\}.$$

3. Példa. Ha $\alpha \in S_3$ az a permutáció, amelyre $1\alpha = 2$, $2\alpha = 1$ és $3\alpha = 3$, akkor

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1, 2),\ (2, 1),\ (3, 3)\}.$$

4. Példa. Nem minden leképezés permutáció, például a

$$\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1, 3),\ (2, 1),\ (3, 3)\}$$

leképezés se nem injektív (mert az 1 és 3 elemeknek ugyanaz a képe) se nem szürjektív (mert az érkezési halmaz 2 elmének nincsen őse).

5.* Tétel. $|S_n| = n!$

6. Példa.

$$S_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$S_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

7. Példa. Számoljuk ki az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ és } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutációk szorzatát. Tudjuk, hogy minden x elemre $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ (ez a leképezés szorzás definíciója). Tehát

$$\begin{aligned} 1(\alpha\beta) &= (1\alpha)\beta = 2\beta = 3, \\ 2(\alpha\beta) &= (2\alpha)\beta = 1\beta = 2, \\ 3(\alpha\beta) &= (3\alpha)\beta = 3\beta = 1, \end{aligned}$$

azaz

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Most kiszámoljuk a $\beta\alpha$ szorzatot is (a zárójelek elhagyásával):

$$\begin{aligned} 1\beta\alpha &= 2\alpha = 1, \\ 2\beta\alpha &= 3\alpha = 3, \\ 3\beta\alpha &= 1\alpha = 2, \end{aligned}$$

azaz

$$\beta\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Vegyük észre, hogy $\alpha\beta \neq \beta\alpha$, azaz a permutációk szorzása nem kommutatív. Végezetül kiszámoljuk β inverzét. Mivel

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \{(1,2),\ (2,3),\ (3,1)\}$$

ezért

$$\beta^{-1} = \{(2,1),\ (3,2),\ (1,3)\} = \{(1,3),\ (2,1),\ (3,2)\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Természetesen β és β^{-1} szorzata az identikus leképezés:

$$\beta\beta^{-1} = \beta^{-1}\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

8. Definíció. A $\pi \in S_n$ permutáció az $x \in \{1, \ldots, n\}$ elemet mozgatja, ha $x\pi \neq x$. A $\pi \in S_n$ által mozgatott elemek halmazát M_π-vel jelöljük, azaz

$$M_\pi = \{\, x \in \{1, \ldots, n\} : x\pi \neq x \,\}.$$

Ha $x\pi = x$, azaz $x \notin M_\pi$, akkor azt mondjuk hogy π-nek x fixpontja.

9. Példa. Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció által mozgatott elemek halmaza $M_\alpha = \{1, 2\}$.

10. Definíció. A $\pi, \sigma \in S_n$ permutációkat idegennek nevezzük, ha $M_\pi \cap M_\sigma = \emptyset$.

11. Tétel. Ha a $\pi, \sigma \in S_n$ permutációk idegenek, akkor

(1) $\pi\sigma = \sigma\pi$, és
(2) $(\pi\sigma)^k = \pi^k\sigma^k$ minden k egészre.

12. Definíció. Legyen $n \geq k \geq 2$, és az $a_1, \ldots, a_k \in \{1, \ldots, n\}$ elemek páronként különbözőek. Ekkor azt a $\pi \in S_n$ permutációt, amelyre

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \ldots, \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1,$$

és $x\pi = x$ minden $x \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{a_1, \ldots, a_k\}$ elemre, ciklusnak nevezzük és röviden így jelöljük:

$$\pi = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k).$$

A k számot a ciklus hosszának nevezzük. A 2 hosszúságú ciklusokat transzpozícióknak hívjuk.

13. Példa. Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció ciklus, mivel a $k = 2$, $a_1 = 1$ és $a_2 = 2$ választással éppen ezt a permutációt kapjuk, azaz $\alpha = (1\ 2)$. Mivel α hossza éppen 2, ezért α transzpozíció is. A

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció szintén ciklus, és $\beta = (1\ 2\ 3)$.

14. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy egy permutáció ciklusos alakban való megadása nem egyértelmű! Egyrészt ugyanazt a permutációt többféleképpen is felírhatjuk ciklusként:

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2).$$

A másik probléma pedig az, hogy az $(1\ 2\ 3)$ permutációról nem tudjuk eldönteni, hogy az S_3 vagy esetleg az S_4 csoport eleme-e. Természetesen ha S_3-beli permutációkról beszélünk, akkor

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

viszont S_4-ben már

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

és ez a két permutáció nem ugyanaz. Ugyan ez a probléma az identikus permutáció „id” jelölésével is, arról sem lehet eldönteni, hogy melyik permutációcsoportban használjuk.

15. Példa.

$$\begin{aligned} S_1 &= \{\mathrm{id}\}, \\ S_2 &= \{\mathrm{id}, (1\ 2)\}, \\ S_3 &= \{\mathrm{id}, (1\ 2), (1\ 3), (2\ 3), (1\ 2\ 3), (3\ 2\ 1)\}. \end{aligned}$$

16. Példa. Természetesen nem minden permutáció ciklus, vegyük például a

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}$$

permutációt. Tegyük fel, hogy π ciklus, és tekintsük azt az esetet, amikor $a_1 = 1$. Ekkor $a_1\pi = 2$, azaz $a_2 = 2$, továbbá $a_2\pi = 3$, azaz $a_3 = 3$. A következő lépésben azt kapjuk, hogy $a_3\pi = 1$ ami éppen egyenlő a_1-gyel, azaz $k = 3$ és az $(1\ 2\ 3)$ ciklust kaptuk. Viszont π több elemet mozgat mint 3, tehát π nem egyenlő $(1\ 2\ 3)$-mal, azaz $a_1 \neq 1$. Minden más esetben hasonló ellentmondásra jutunk.

Persze π előáll ciklusok szorzataként:

$$\pi = (1\ 2\ 3)(4\ 5).$$

17. Tétel. Minden S_n-beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott. (Az identikus permutációt ciklusok üres szorzatának tekintjük.)

18. Példa. Adjuk meg a $\pi = (5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7)$ permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként. Tekintsük azokat az elemeket, melyeket a szorzat valamely tagja mozgat: $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$. Vegyünk ki ezek közül egyet, mondjuk az 1-gyet, és számoljuk ki, hogy ezt a π permutáció milyen elemekbe viszi át:

$$1\pi = 1(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 3(4\ 3\ 7) = 7.$$

Folytassuk a kapott elemekkel, azaz

$$\begin{aligned} 7\pi &= 7(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(4\ 3\ 7) = 4, \\ 4\pi &= 4(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 5(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(4\ 3\ 7) = 1. \end{aligned}$$

Visszaértünk ahhoz az elemhez, amiből kiindultunk, tehát megvan az első ciklusunk: $(1\ 7\ 4)$. A maradék elemekből vegyük a következőt, mondjuk a 2-től, és számoljuk ki hogy ezt π milyen elemekbe viszi át:

$$\begin{aligned} 2\pi &= 2(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 3(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 5(4\ 3\ 7) = 5, \\ 5\pi &= 5(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 2(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 2(4\ 3\ 7) = 2, \end{aligned}$$

azaz a második ciklus a $(2\ 5)$ transzpozíció. Kimaradt még a 3, amelyre elvégezve a számolást azt kapjuk, hogy

$$3\pi = 3(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 4(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 4(4\ 3\ 7) = 3,$$

azaz π a 3-mat nem mozgatja, tehát ezt az elemet figyelmen kívül hagyhatjuk. Tehát π páronként idegen ciklusok szorzatára bontott alakja $\pi = (1\ 7\ 4)(2\ 5)$. Ezt a számolást nem írjuk le általában, hanem fejben végezzük el!

19. Tétel. Tetszőleges $\pi = (a_1\ a_2\ \cdots\ a_k) \in S_n$ ciklusra

(1) $\pi^{-1} = (a_k\ a_{k-1}\ \cdots\ a_1)$,
(2) $\pi^k = \mathrm{id}$,
(3) Ha $i \equiv j \pmod{k}$, akkor $\pi^i = \pi^j$.

20. Példa. Kiszámoljuk az $((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9))^{-22}$ permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként. Mivel az $(1\ 2\ 3\ 4)$, $(5\ 6\ 7)$ és $(8\ 9)$ ciklusok páronként idegenek, ezért

$$((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7)(8\ 9))^{-22} = (1\ 2\ 3\ 4)^{-22}(5\ 6\ 7)^{-22}(8\ 9)^{-22}.$$

Az $(1\ 2\ 3\ 4)$ ciklus hossza 4 és a -22-edik hatványát keressük. Mivel $-22 \equiv 2 \pmod 4$, ezért

$$(1\ 2\ 3\ 4)^{-22} = (1\ 2\ 3\ 4)^2 = (1\ 3)(2\ 4).$$

Hasonlóan $-22 \equiv -1 \pmod 3$, illetve $-22 \equiv 0 \pmod 2$, azaz

$$(5\ 6\ 7)^{-22} = (5\ 6\ 7)^{-1} = (7\ 6\ 5), \text{ és}$$
$$(8\ 9)^{-22} = (8\ 9)^0 = \mathrm{id}\,.$$

Tehát

$$((1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6\ 7))^{-22} = (1\ 3)(2\ 4)(7\ 6\ 5).$$

21. Példa. Oldjuk meg az

$$(1\ 3\ 2)(2\ 5)\pi(4\ 5\ 7) = (2\ 6)$$

egyenletet. Az egyenlet mindkét oldalát ugyanazzal a permutációval ugyanarról az oldalról beszorozhatjuk. Először balról szorzunk $(1\ 3\ 2)$ inverzével:

$$(1\ 3\ 2)^{-1}(1\ 3\ 2)(2\ 5)\pi(4\ 5\ 7) = (1\ 3\ 2)^{-1}(2\ 6),$$

azaz

$$(2\ 5)\pi(4\ 5\ 7) = (2\ 3\ 1)(2\ 6).$$

Ezt folytatva azt kapjuk, hogy

$$\pi = (5\ 2)(2\ 3\ 1)(2\ 6)(7\ 5\ 4),$$

amit a szokásos módon páronként idegen ciklusok szorzatára bontunk: $\pi = (5\ 3\ 1\ 6\ 2\ 4\ 7)$.

22. Tétel. Tetszőleges ciklus felírható transzpozíciók szorzataként, mégpedig

$$(a_1\ a_2\ a_3\ \cdots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_1\ a_3)\cdots(a_1\ a_k).$$

Következésképpen, minden permutáció transzpozíciók szorzatára bontható (de ez általában nem egyértelmű).

23. Példa. $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(5\ 6)$, de mivel $(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4\ 1)$, ezért $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (2\ 3)(2\ 4)(2\ 1)(5\ 6)$, vagy $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (2\ 3)(5\ 6)(2\ 4)(2\ 1)$, mert idegen transzpozíciók felcserélhetők.

24.* Tétel. Minden permutáció vagy csak páros vagy csak páratlan sok transzpozíció szorzataként írható fel.

25. Definíció. A $\pi \in S_n$ permutációt párosnak nevezzük, ha felbontható páros sok transzpozíció szorzatára. A nempáros permutációkat páratlannak nevezzük. Továbbá definiáljuk:

$$\operatorname{sgn}\pi = \begin{cases} +1, & \text{ha } \pi \text{ páros,} \\ -1, & \text{ha } \pi \text{ páratlan.} \end{cases}$$

26.* Tétel. Legyen $A = (a_{i,j}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tetszőleges négyzetes mátrix. Ekkor

$$|A| = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\cdot a_{1,1\sigma}\cdot a_{2,2\sigma}\cdots a_{n,n\sigma}.$$

27. Példa. $n = 2$ esetén:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \operatorname{sgn}(\mathrm{id})\cdot a_{11}a_{22} + \operatorname{sgn}((1\ 2))\cdot a_{12}a_{21} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

$n = 3$ esetén:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} &= \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) \cdot a_{11}a_{22}a_{33} + \operatorname{sgn}((1\ 2)) \cdot a_{12}a_{21}a_{33} + \operatorname{sgn}((1\ 3)) \cdot a_{13}a_{22}a_{31} \\ &\quad + \operatorname{sgn}((2\ 3)) \cdot a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn}((1\ 2\ 3)) \cdot a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}((1\ 3\ 2)) \cdot a_{13}a_{21}a_{32} \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32},\end{aligned}$$

ami éppen a Sarrus-szabály.