

MBLK12: Logikai (levelező)

(előadásvázlat)

Maróti Miklós

1. ÍTÉLETKALKULUS

1. Definíció. **Ítéletnek** nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az ítélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet **logikai értéke** vagy **igazságértéke** igaz (vagy hamis). Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

2. Példa. Az alábbi mondatok közül A és B ítélet, de C és D nem az.

A : A Föld a Nap körül kering.

B : Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.

(Ez az úgynevezett Goldbach-sejtés, amiről nem tudjuk hogy igaz-e.)

C : Miért kering a Föld a Nap körül?

D : Most nem mondok igazat.

(Ez az állítás se igaz, se hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

3. Példa. A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:

F : Ha süt a nap, akkor kimegyek az uszodába.

G : Kimegyek az uszodába, és süt a nap.

H : Nem süt a nap.

I : Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

J : Kimegyek az uszodába, vagy süt a nap.

K : Akkor és csak akkor süt a nap, ha kimegyek az uszodába.

4. Definíció. Tetszőleges A, B ítéletre definiáljuk az alábbi **összetett ítéleteket**:

(1) A **negációja** a „nem A ” ítélet, melynek jele $\neg A$;

(2) A, B **konjunkciója** az „ A és B ” ítélet, melynek jele $A \wedge B$;

(3) A, B **diszjunkciója** az „ A vagy B ” ítélet, melynek jele $A \vee B$;

(4) A, B **implikációja** a „ha A , akkor B ” ítélet, melynek jele $A \rightarrow B$;

(5) A, B **ekvivalenciája** az „akkor és csak akkor A , ha B ” ítélet, melynek jele $A \leftrightarrow B$.

Ha egy ítélet nem bontható fel összetett ítéletre, akkor **primitív ítéletnek** nevezzük.

5. Definíció. Az előző definícióban bevezetett öt **logikai művelet** művelet táblázatai a következők, amely segítségével összetett ítéletek logikai értéke kistámítható:

A	$\neg A$	A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
h	i	h	h	h	h	i	i
h	h	h	i	h	i	i	h
i	h	i	h	h	i	h	h
i	i	i	i	i	i	i	i

6. Példa. A mindennapi életben a „vagy” kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.

L : Kávét hoz, vagy álmos. (**megengedő vagy**: akár mind a kettő megtörténhet.)

M : Gyalog megy, vagy biciklizik. (**kizáró vagy**: csak az egyik történhet meg.)

Az „ A kizáró vagy B ” ítélet alatt igazából az $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$ ítéletet értjük, és nem vezetük be új logikai műveletet.

7. Példa. A „csak akkor A , ha B ”, „ B szükséges feltétele A -nak”, „ A elegendő feltétele B -nek” és „ha A , akkor B ” ítéletek mind ugyan azt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:

N : Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.

O : A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.

P : Az uszodába menés elegendő feltétele a napsütésnek.

Q: Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.

8. Definíció. **Ítéletváltozónak** nevezzük az olyan változókat, amelyek ítéleteket jelölnek. Az ítéletkalkulus **formulái** a következők:

- (1) az ítéletváltozók mindegyike formula;
- (2) ha F, G formula, akkor $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$ mindegyike formula; és
- (3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

9. Definíció. Legyenek F és G formulák. Azt mondjuk, hogy a G **részformulája** F -nek, ha fellép az előző definícióban leírt előállítás során.

10. Példa. Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben a ítéletváltozók a primitéleteket jelöli. Például a következő ítéletek

R : Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

S : Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.

T : Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.

egy lehetséges formalizálása a következő: $R = A \rightarrow B, S = (\neg B) \rightarrow (\neg A), T = \neg((A \wedge (\neg B)))$, ahol az A és B ítéletváltozók a „Kimegyek az uszodába” és „Süt a nap” primitéleteket jelöli.

11. Definíció. Ha adott az ítéletváltozók igazságértéke, akkor a **formula igazságértéke** a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az ítéletváltozók minden lehetséges értékére a formula igazságértékét kiszámoljuk, akkor megkapjuk a formula **igazságtáblázatát**.

12. Példa. A 10. példa T formulájának igazságtáblázata (utolsó oszlop) a felépítése alapján kiszámolva:

A	B	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
h	h	i	h	i
h	i	h	h	i
i	h	i	i	h
i	i	h	h	i

13. Definíció. Az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblázata megegyezik). Ekkor ezt úgy jelöljük, hogy $F \equiv G$. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha igazságértéke mindig igaz, azaz $F \equiv i$.

14. Tétel. Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

\wedge, \vee alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{lll}
 A \wedge A \equiv A, & A \vee A \equiv A, & \text{(idempotencia)} \\
 A \wedge B \equiv B \wedge A, & A \vee B \equiv B \vee A, & \text{(kommutativitás)} \\
 (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), & (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), & \text{(asszociativitás)} \\
 A \wedge (A \vee B) \equiv A, & A \vee (A \wedge B) \equiv A, & \text{(abszorptivitás)} \\
 A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), & A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), & \text{(disztibutivitás)}
 \end{array}$$

\neg alaptulajdonsága:

$$\begin{array}{ll}
 \neg(\neg A) \equiv A, & \text{(dupla tagadás)} \\
 \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), & \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \quad \text{(De Morgan szabályok)}
 \end{array}$$

\mathbf{i} és \mathbf{h} alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{ll} A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h}, & A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i}, \\ A \wedge \mathbf{i} \equiv A, & A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, \\ A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}, & A \vee \mathbf{h} \equiv A, \\ \mathbf{i} \rightarrow A \equiv A, & \mathbf{h} \rightarrow A \equiv \mathbf{i}, \\ A \rightarrow \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, & A \rightarrow \mathbf{h} \equiv \neg A, \end{array}$$

\rightarrow és \leftrightarrow alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{ll} A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B, & A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A), \\ A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A), & A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A, \\ A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C, & (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C), \\ A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C), & (A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C). \end{array}$$

15. Tétel. Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

16. Tétel. Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

17. Következmény. Minden formula logikailag ekvivalens egy olyan formulával, amelyben csak negáció, konjunkció (és diszjunkció) szerepel.

18. Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak a negáció, konjunkció és diszjunkció szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F -ből úgy kapunk, hogy

- (1) minden \vee jelet \wedge -re cserélünk,
- (2) minden \wedge jelet \vee -re cserélünk,
- (3) minden A negálatlan ítéletváltozót $\neg A$ -ra cserélünk, és
- (4) minden $\neg A$ negált ítéletváltozót A -ra cserélünk.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.

19. Példa. Legyen $F = A \wedge (B \vee \neg C)$. Ekkor $\neg F \equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$. Figyelem, fontos, hogy csak ítéletváltozók lehetnek negálva az F formulában. Például ha $F = A \wedge \neg(B \vee \neg C)$, akkor $\neg F \not\equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$, hanem $\neg F \equiv \neg A \vee (B \vee \neg C)$.

20. Definíció. Az F formulát **diszjunktív normálformának** nevezünk, ha $F = K_1 \vee \dots \vee K_t$ alakú, ahol K_1, \dots, K_t mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója. Az A_1, \dots, A_n változókból felépített diszjunktív normálforma **teljes**, ha K_1, \dots, K_t páronként különböző n -tagú konjunkciók, amelyekben az A_1, \dots, A_n ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul.

21. Tétel. Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

2. PREDIKÁTUMKALKULUS

22. Definíció. **Predikátumnak** nevezzük az olyan függvényt vagy kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk. A predikátum változóit **individuumváltozóknak**, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét **individuumtartománynak** nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűvel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

23. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:

- (1) $O(x, y)$: „ x osztója y -nak”,
- (2) $P(x)$: „az x szám prím”,
- (3) $F(x)$: „az x szám felbonthatatlan”,
- (4) $M(x, y, z)$: „az x és y számok szorzata z ”.

24. Definíció. Tetszőleges A ítéletre és x individuumváltozóra definiáljuk az alábbi ítéleteket:

- (1) „minden x -re A ”, melynek neve **univerzális kvantifikáció** és jele $(\forall x)A$;
- (2) „létezik x , hogy A ”, melynek neve **egzisztenciális kvantifikáció** és jele $(\exists x)A$.

25. Példa. Minden ítélet, amely egy adott individuumtartomány elemeiről állít valamit, formalizálható. Például az előző példa predikátumait felhasználva a következő ítéleteket formalizáljuk (individuumtartomány az egész számok halmaza):

- (1) „tetszőleges a, b, c egész számokra ha $a \mid b$ és $b \mid c$ akkor $a \mid c$ ”

$$(\forall a, b, c)((O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c));$$
- (2) „az a szám akkor és csak akkor osztója b -nek, ha létezik olyan c egész szám, hogy $ac = b$ ”

$$O(a, b) \leftrightarrow (\exists c)(M(a, c, b));$$
- (3) „minden prímszám felbonthatatlan”

$$(\forall a)(P(a) \rightarrow F(a)).$$

26. Megjegyzés. Figyeljük meg, hogy a \forall kvantor után általában implikációt, a \exists kvantor után pedig ést használunk, ahogy ezt a „minden politikus hazug” $(\forall x)(P(x) \rightarrow H(x))$ és a „létezik olyan politikus, aki hazug” $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$ ítéletek formalizálásai mutatják.

27. Definíció. **Függvénynek** nevezzük az olyan kifejezést, amelybe az individuumtartomány elemeit behelyettesítve az individuumtartomány újabb elemét kapjuk. A nullváltozós függvényeket **individuumkonstansoknak** nevezzük.

28. Példa. Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:

- (1) $x \cdot y$: „ x és y szorzata”,
- (2) $\text{lko}(x, y)$: „ x és y (nemnegatív) legnagyobb közös osztója”,
- (3) $\text{ln}(x)$: „az x szám természetes alapú logaritmus”,
- (4) 1 : „az 1 konstans”.

29. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek \mathcal{F} és a predikátumjelek \mathcal{P} halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát (aritását). Ekkor a predikátumkalkulus (első rendű nyelv) **kifejezései** a következők:

- (1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés;
- (2) ha t_1, \dots, t_n kifejezések és $f \in \mathcal{F}$ n -változós függvényjel, akkor $f(t_1, \dots, t_n)$ is kifejezés; és
- (3) minden kifejezés az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

A predikátumkalkulus (első rendű nyelv) **formulái** a következők:

- (1) ha t_1, \dots, t_n kifejezések és $P \in \mathcal{P}$ n -változós predikátumjel, akkor $P(t_1, \dots, t_n)$ prímmformula;
- (2) ha F, G formulák és x individuumváltozó, akkor $(\neg F)$, $(F \wedge G)$, $(F \vee G)$, $(F \rightarrow G)$, $(F \leftrightarrow G)$, $((\forall x)F)$, $((\exists x)F)$ mindegyike összetett formula; és
- (3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

30. Példa. Tartalmazza $\mathcal{F} = \{\cdot\}$ a szokásos 2-változós szorzás függvényjelet és $\mathcal{R} = \{=\}$ a szokásos 2-változós egyenlőség predikátumjelet. Ekkor az számelméletnél bevezetett oszthatóságra vonatkozó definíciókat és állításokat mind formalizálhatjuk. Például a „tetszőleges a, b, c egészekre ha a osztja b -t és b osztja c -t, akkor a osztja c -t” ítélet egy lehetséges formalizálása a következő:

$$(\forall a, b, c)((\exists x)(a \cdot x = b) \wedge (\exists x)(b \cdot x = c)) \rightarrow (\exists x)(a \cdot x = c).$$

31. Definíció. A formulák felépítése során fellépő $(\forall x)F$ és $(\exists x)F$ alakú részformuláknál F -et a **kvantor hatáskörének** hívjuk. Ekkor az x individuumváltozó F -beli előfordulásait **kötöttnek** nevezük, minden nem kötött előfordulást **szabadnak** nevezünk. Egy formula **szabad változói** alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula **zárt**, ha nincs szabad változója.

32. Példa. Az

$$(\forall x)((\exists y)(x \cdot y = z) \rightarrow (x = y))$$

formulában a z változó szabadon fordul elő, az y változó kétszer fordul elő, először kötötten majd szabadon, az x változó szintén kétszer fordul elő, mindekkétszer kötötten. Tehát a formula szabad

változói y és z . A y változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mint ha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\forall x)((\exists t)(x \cdot t = z) \rightarrow (x = y)).$$

33. Definíció. Rögzítsük a függvényjelek \mathcal{F} és a predikátumjelek \mathcal{P} halmazát, az U individuumtartományt, és rajta a **függvényjelek** és **predikátumjelek** egy **interpretációját**, azaz minden n -változós $f \in \mathcal{F}$ függvényjelre egy $f: U^n \rightarrow U$ függvényt, és minden n -változós $P \in \mathcal{P}$ predikátumjelre egy $P: U^n \rightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ predikátumot. Ha t olyan kifejezés, melynek változói szerepelnek az x_1, \dots, x_n változók között, akkor az individuumtartományon értelemszerűen definiáljuk az n -változós $t(x_1, \dots, x_n)$ függvényt a kifejezés felépítése szerint, melyet a t **kifejezés interpretációjának** nevezzük. Ha F olyan formula, melynek szabad változói szerepelnek az x_1, \dots, x_n változók között, akkor az individuumtartományon értelemszerűen definiáljuk az n -változós $F(x_1, \dots, x_n)$ predikátumot a formula felépítése szerint, melyet az F **formula interpretációjának** nevezzük.

34. Példa. Tekintsük az $F = ((\exists z)(x \cdot z = y)) \wedge ((\exists z)(y \cdot z = x))$ formulát. Ennek a formulának x és y a szabad változója, tehát minden individuumtartományon (amelyen van szorzás és egyenlőség értelmezve) meghatároz egy kétváltozós $F(x, y)$ predikátumot. Az egész számok halmazán ez a predikátum ekvivalens az $x = \pm y$ predikátummal. Fontos, hogy a formula interpretációja függ az individuumtartománytól és a függvényjelek és predikátumjelek rajta való interpretációjától. Ha például a \cdot függvényjel alatt az összeadást értenénk az egész számok halmazán, akkor $F(x, y)$ az azonosan igaz predikátum lenne.

35. Definíció. Azt mondjuk, hogy az F és G formulák **logikailag ekvivalensek**, és azt írjuk hogy $F \equiv G$, ha tetszőleges individuumtartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját a formulák által meghatározott $F(x_1, \dots, x_n)$ és $G(x_1, \dots, x_n)$ predikátumok megegyeznek. Egy F formulát **tautológiának** hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

36.* Tétel. Legyenek F, G tetszőleges formulák, H pedig olyan formula, melynek x nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák

$$\begin{aligned} (\forall x)(\forall y)F &\equiv (\forall y)(\forall x)F, & (\exists x)(\exists y)F &\equiv (\exists y)(\exists x)F, \\ \neg(\forall x)F &\equiv (\exists x)(\neg F), & \neg(\exists x)F &\equiv (\forall x)(\neg F), \\ (\forall x)(F \wedge G) &\equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, & (\exists x)(F \vee G) &\equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G, \\ (\forall x)H &\equiv H, & (\exists x)H &\equiv H. \end{aligned}$$

37.* Tétel. Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

38.* Tétel. Ha egy formula részformuláját egy vele logikailag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

39. Megjegyzés. Az ítéletkalkulussal ellentétben nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumtartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

40.* Tétel. Legyen F olyan formula, amelyben csak az univerzális-, az egzisztenciális kvantor, a negáció, konjunkció és diszjunkció szerepel. Legyen F^* az a formula, amelyet az F -ből úgy kapunk, hogy

- (1) minden \forall jelet \exists -re cserélünk,
- (2) minden \exists jelet \forall -re cserélünk,
- (3) minden \vee jelet \wedge -re cserélünk,
- (4) minden \wedge jelet \vee -re cserélünk,
- (5) minden A negálatlan primformulát $\neg A$ -ra cserélünk,
- (6) minden $\neg A$ negált primformulát A -ra cserélünk, és
- (7) minden kifejezést meghagyunk a primformulákban.

Ekkor $\neg F \equiv F^*$.

3. KÖVETKEZMÉNYFOGALOM

41. Definíció. Legyen \mathcal{A} formulák véges vagy végtelen halmaza, és B formula. Azt mondjuk, hogy B **logikai következménye** a \mathcal{A} formuláknak, és ezt $\mathcal{A} \models B$ -el jelöljük, ha tetszőleges értéket adva az ítéletváltozóknak (vagy a predikátumkalkulus esetén tetszőleges individuumentartományt és interpretációt véve) minden olyan esetben, amikor a \mathcal{A} formuláinak mindegyike igaz, B is igaz. Az \mathcal{A} elemeit **premisszáknak**, B -et pedig **konklúzióknak** nevezzük.

42. Példa. Tekintsük az alábbi következtetést az ítéletkalkulusban: „Ha 4 osztható 2-vel, akkor 4 páros. Ha 4 páros, akkor 44 is páros. 44 páros. Tehát 4 páros.” Formalizálás után azt kell megvizsgálnunk, hogy az $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \models B$ következtetés logikailag helyes-e. Az $A = \mathbf{h}$, $B = \mathbf{h}$ és $C = \mathbf{i}$ értékadás mellett látjuk hogy a premisszák mindegyike igaz, a konklúzió viszont nem, tehát a következtetés logikailag nem helyes.

43. Példa. Tekintsük az alábbi következtetést a predikátumkalkulusban: „ x akkor és csak akkor osztója y -nak, ha létezik olyan z , hogy $xz = y$. Tehát ha x osztója y -nak és y osztója z -nek, akkor x osztója z -nek”. Formalizálás után azt kell megvizsgálnunk, hogy $(\forall x, y)(O(x, y) \leftrightarrow (\exists z)(xz = y)) \models (O(x, y) \wedge O(y, z)) \rightarrow O(x, z)$ logikai következtetés helyes-e.

Megmutatjuk, hogy a következtetés nem helyes, amihez elég mutatni egy megfelelően választott individuumentartományt és a függvényjelek és predikátumjelek megfelelő interpretációját, ahol a premisszák teljesülnek, de a konklúzió nem. Legyen $\{0, 1, 2\}$ az individuumentartomány, a szorzásjel és az O predikátumjel interpretációi a következők

\cdot	0	1	2	O	0	1	2
0	0	1	0	0	\mathbf{i}	\mathbf{i}	\mathbf{h}
1	0	0	2	1	\mathbf{i}	\mathbf{h}	\mathbf{i}
2	0	0	0	2	\mathbf{i}	\mathbf{h}	\mathbf{h}

Ekkor a premissza teljesül (függetlenül attól, hogy hogyan adunk értéket a konkúzióban szereplő szabad változóknak, mivel a premissza zárt formula), a konkúzió viszont nem, például az $x = 0, y = 1$ és $z = 2$ értékadásnál. Nyilvánvalóan az a gond, hogy a szorzásjel interpretációja nem asszociatív. Ha felvennénk a premisszák közé a $(\forall x, y, z)(x(yz) = (xy)z)$ formulát, akkor a következtetés már helyes lenne. (Megjegyezzük, hogy a pozitív egészek halmazán a hatványozás szintén nem asszociatív, de mégis teljesül a konkúzió ott.)

44. Tétel. Legyenek A_1, \dots, A_n, B formulák. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (1) $A_1, \dots, A_n \models B$,
- (2) $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B$,
- (3) $\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$.
- (4) $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ tautológia.

45. Definíció. **Feltételes bizonyításról** beszélünk akkor, amikor az $\mathcal{A} \models B \rightarrow C$ következtetés helyett a $\mathcal{A} \cup \{B\} \models C$ következtetést bizonyítjuk. **Indirekt bizonyításról** beszélünk akkor, amikor az $\mathcal{A} \models B$ következtetés helyett az $\mathcal{A} \cup \{\neg B\} \models \mathbf{h}$ következtetést bizonyítjuk. **Kontrapozícióval való bizonyításról** beszélünk akkor, amikor az $\mathcal{A} \cup \{B\} \models C$ következtetés helyett az $\mathcal{A} \cup \{\neg C\} \models \neg B$ következtetést bizonyítjuk.

46.* Tétel (Kompaktsági tétel). $\mathcal{A} \models B$ akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan véges $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ részhalmaz, amelyre $\mathcal{A}_0 \models B$.

47.* Következmény. Nem létezik olyan formula, amely akkor és csak akkor igaz egy véges gráfra, ha az összefüggő.

48. Definíció. Azt mondjuk, hogy az \mathcal{A} formulák halmaza **kielégíthető**, ha van olyan individuumentartomány, a függvény- és predikátumjelek olyan interpretációja és a szabad változók olyan értékadása, amely mellett az \mathcal{A} formulák mindegyike igaz.

49.* Tétel. Formulák \mathcal{A} halmaza akkor és csak akkor elégíthető ki, ha minden véges $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$ részhalmaza kielégíthető.

50.* Következmény. Egy gráf akkor és csak akkor háromszínezhető, ha minden véges részgráfja háromszínezhető.