MBNK12: Halmazok, leképezések

(előadásvázlat, 2019. február 26.)

Maróti Miklós

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, és $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát.

1. Halmazok

1. Megjegyzés. A halmaz és a halmaz eleme alapfogalmak, nem definiáljuk. Az $a \in A$ jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy a eleme A-nak. A $\neg(a \in A)$ formula helyett $a \notin A$-t írunk. Megjegyezzük, hogy egy elem nem lehet többször eleme egy halmaznak, azaz csak az számít, hogy az adott elem eleme-e a halmaznak vagy sem. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében csak azt tesszük fel, hogy $\in$ kétváltozós predikátumjel, és az individuumtartományunk a halmazok összessége.

2. Definíció. Ha az A és B halmazoknak ugyanazok az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy egyenlők, és azt írjuk, hogy $A = B$. Ha A minden eleme B-nek is eleme, azaz $(\forall x)(x \in A \to x \in B)$, akkor azt mondjuk, hogy A részhalmaza B-nek, és azt írjuk hogy $A \subseteq B$. Az A halmaz valódi részhalmaza B-nek, amelyet $A \subset B$-vel jelölünk, ha $A \subseteq B$, de $A \neq B$.

3. Definíció. Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, üreshalmaznak nevezzük és $\emptyset$-el jelöljük, azaz $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$ teljesül.

4. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

(1) $A \subseteq A$ és $\emptyset \subseteq A$;
(2) ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq C$, akkor $A \subseteq C$;
(3) $A = B$ akkor és csak akkor, ha $A \subseteq B$ és $B \subseteq A$.

5. Definíció. Legyenek $a_1, \ldots, a_n$ nem feltétlen különböző elemek. Ekkor $\{a_1, \ldots, a_n\}$ azt az A halmazt jelöli, amelynek pontosan $a_1, \ldots, a_n$ az elemei, azaz $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x = a_1 \vee \cdots \vee x = a_n))$.

6. Példa. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{1, 2\}; \quad B = \{1, 3-1\}; \quad C = \{1, 1, 2\}; \quad D = \{\emptyset, 1, 2\}; \quad E = \{\{1\}, 2\}; \quad F = \{\{1, 2\}\}.$$

Ekkor $A = B = C$, a többi mind különböző. D-nek három, F-nek egy eleme van, a többinek kettő. $\{1\}$ részhalmaza A, B, C és D-nek, de E és F-nek nem. $\{1\}$ csak E-nek eleme, a többinek nem.

7. Definíció. Legyen F olyan formula, melynek csak x a szabad változója. Ekkor $\{\, x : F \,\}$ azt az A halmazt jelöli, amelyre $(\forall x)(F \leftrightarrow x \in A)$ teljesül. Ha nem világos, hogy x milyen U individuumtartomány eleme lehet, akkor az $\{\, x \in U : F \,\}$ jelölést használjuk. Formula helyett sokszor csak szöveges predikátumot írunk amelyet megfelelően lehetne formalizálni.

8. Példa. A következő halmazok mind egyenlők: $\{1, 2, 3, 6\}$, $\{\, x \in \mathbb{N} : x \mid 6 \,\}$, $\{\, x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \text{ és } x \mid 6 \,\}$, $\{\,\text{hat pozitív osztói}\,\}$.

9. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk az egyesítésüket és metszetüket:

$$A \cup B = \{\, x : x \in A \vee x \in B \,\}, \qquad A \cap B = \{\, x : x \in A \wedge x \in B \,\}.$$

Azt mondjuk, hogy A és B diszjunktak, ha $A \cap B = \emptyset$.

10. Definíció. Legyen rögzítve egy U univerzum. Ekkor tetszőleges $A \subseteq U$ halmazra definiáljuk az A komplementerét:

$$\overline{A} = \{\, x \in U : x \notin A \,\}.$$

11. Definíció. Tetszőleges A és B halmazokra definiáljuk a különbségüket és szimmetrikus különbségüket:

$$A \setminus B = \{\, x : x \in A \wedge x \notin B \,\}, \qquad A \triangle B = \{\, x : x \in A \leftrightarrow x \notin B \,\}.$$

12. Tétel. Tetszőleges $A, B, C \subseteq U$ halmazokra

$$
\begin{array}{rlr}
A \cap A = A, & A \cup A = A, & \text{(idempotencia)} \\
A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & \text{(kommutativitás)} \\
(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & \text{(asszociativitás)} \\
(A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \\
(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), & \text{(disztibutivitás)}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rlr}
 & \overline{\overline{A}} = A, & \text{(dupla tagadás)} \\
\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & \text{(De Morgan szabályok)} \\
A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, & \\
A \cap U = A, & A \cup U = U, & \\
A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A &
\end{array}
$$

$$
A \setminus B = A \cap \overline{B} \qquad A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).
$$

13. Definíció. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az (a, b) rendezett elempárt. Az (a, b) rendezett elempárnak a és b az első, illetve a második koordinátája. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők.

14. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra definiáljuk a Descartes-szorzatukat:

$$A \times B = \{\, (a, b) : a \in A \wedge b \in B \,\}.$$

15. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ kételemű és $B = \{3, 4, 5\}$ háromelemű halmazok Descartes-szorzata $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$ hatelemű halmaz. Vegyük észre, hogy $\emptyset \times B = \emptyset$, mert ha (a, b) eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor $a \in \emptyset$ lenne, ami nem lehet.

16. Definíció. Tetszőleges A halmaz esetén az A összes részhalmazainak halmazát az A hatványhalmazának nevezzük és $\mathcal{P}(A)$-val jelöljük, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{\, X : X \subseteq A \,\}.$$

17. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

8-elemű. Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, azaz egy olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz. Gondoljuk át, hogy $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$.

2. Megfeleltetések és leképezések

18. Definíció. Tetszőleges A, B halmazokra az $A \times B$ halmaz részhalmazait A-ból B-be menő megfeleltetéseknek nevezzük. Az A halmazt a megfeleltetés indulási halmazának, B-t pedig az érkezési halmazának nevezzük.

19. Példa. Az $A = \{1, 2\}$ halmazból a $B = \{3, 4, 5\}$ halmazba menő megfeleltetések pontosan a $P(A \times B)$ elemei, azaz $2^6 = 32$ van belőlük. Például az $\emptyset$ is megfeleltetés A-ból B-be, ebből látható, hogy a megfeleltetés megadásakor mindig meg kell adni az érkezési és indulási halmazokat is.

20. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés értelmezési tartománya az $\{\, a \in A : (\exists b \in B)((a, b) \in \varrho) \,\}$, értékkészlete pedig a $\{\, b \in B : (\exists a \in A)((a, b) \in \varrho) \,\}$ halmazok.

21. Példa. Vegyük a $\varrho = \{\, (x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x = y^2 \,\}$ megfeleltetést a valós számokon. Ekkor ϱ értelmezési tartománya $\mathbb{R}_0^+$, az értékkészlete pedig $\mathbb{R}$.

22. Jelölés. A megfeleltetéseket négyféleképpen ábrázolhatjuk: 1) koordinátarendszerben berajzoljuk azokat a pontokat, melyek meg vannak feleltetve egymásnak, 2) felrajzolhatjuk az indulási és érkezési halmazokat az elemeikkel, és a megfeleltetett elemeket nyíllal összekötjük, 3) ha az érkezési és indulási halmazok megegyeznek, akkor egy irányított gráf éleivel jelöljük a megfeleltetett elemeket, 4) egy 0,1 mátrixszal, melynek sorai az indulási, oszlopai pedig az érkezési halmaz elemeit jelöli.

23. Definíció. Minden $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetésre definiáljuk az inverzét:

$$\varrho^{-1} = \{\, (b,a) \in B \times A : (a,b) \in \varrho \,\}.$$

Vegyük észre, hogy $(\rho^{-1})^{-1} = \rho$.

24. Definíció. Ha a $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés érkezési halmaza megegyezik a $\sigma \subseteq B \times C$ megfeleltetés indulási halmazával, akkor definiáljuk a $\varrho\sigma \subseteq A \times C$ szorzatukat:

$$\varrho\sigma = \{\, (a,c) \in A \times C : (\exists b \in B)((a,b) \in \varrho \wedge (b,c) \in \sigma) \,\}.$$

25. Példa. Vegyünk emberek egy E halmazát és rajtuk a $\sigma = \{\, (x,y) \in E \times E : x \text{ szülője } y\text{-nak} \,\}$ megfeleltetést. Ekkor $\sigma\sigma$ a „nagyszülő”, $\sigma^{-1}\sigma$ pedig a „egyenlő, testvér vagy féltestvér” megfeleltetést adja.

26. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times B$ megfeleltetés parciális leképezés, ha minden $a \in A$ elemre legfeljebb egy olyan $b \in B$ elem létezik, hogy $(a,b) \in \varrho$. Ilyenkor a $\varrho\colon A \to B$ jelölés használjuk, ami azt jelenti, hogy ϱ parciális leképezés A-ból B-be. Továbbá $(a,b) \in \varrho$ helyett azt mondjuk hogy az a elem ϱ melletti képe b, és azt írjuk, hogy $a\varrho = b$ vagy $\varrho(a) = b$. A parciális leképezést leképezésnek nevezzük, ha minden $a \in A$ elemre pontosan egy vele megfeleltetett $b \in B$ elem létezik.

27. Példa. A 21. példában megadott megfeleltetés nem parciális leképezés, mivel mind $(4,2)$, mind $(4,-2)$ is eleme ϱ-nak. Viszont a $\varrho \cap (\mathbb{R} \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés $\mathbb{R}$-ből $\mathbb{R}_0^+$-ba már parciális leképezés de még mindig nem leképezés, mivel a -1 elemnek nincsen képe. A $\varrho \cap (\mathbb{R}_0^+ \times \mathbb{R}_0^+)$ megfeleltetés viszont már leképezés.

28. Példa. Minden leképezés elempárok halmaza. Vegyük például az $A = \{-2,-1,0,1,2\}$ halmazon az abszolútérték függvényt. Ekkor ez leképezés amely egyenlő a $\{(-2,2),(-1,1),(0,0),(1,1),(2,2)\}$ halmazzal.

29. Tétel. Ha $\varrho\colon A \to B$ és $\sigma\colon B \to C$ leképezések, akkor $\varrho\sigma\colon A \to C$ is leképezés és tetszőleges $a \in A$ elemre $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$.

30. Definíció. Tetszőleges A halmazon definiáljuk az identikus leképezést:

$$\mathrm{id}_A = \{\, (a,b) \in A \times A : a = b \,\}.$$

31. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$ leképezésre $\mathrm{id}_A\,\varrho = \varrho$ és $\varrho\,\mathrm{id}_B = \varrho$.

32. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$, $\sigma\colon B \to C$ és $\tau\colon C \to D$ leképezésekre $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$, azaz a szorzás asszociatív.

33. Példa. Vegyük az $A = \{1,2,3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1,2),(2,3),(3,1)\}$ és $\sigma = \{(1,2),(2,1),(3,3)\}$ leképezéseket. Ekkor $\varrho\sigma = \{(1,1),(2,3),(3,2)\}$ és $\sigma\varrho = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$, azaz a szorzás nem kommutatív.

34. Definíció. A $\varrho\colon A \to B$ leképezés szürjektív (vagy ráképezés), ha minden elem előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A $\varrho\colon A \to B$ leképezés injektív (vagy kölcsönösen egyértelmű), ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \to a_1 = a_2).$$

A ϱ leképezés bijektív (vagy kölcsönösen egyértelmű ráképezés), ha szürjektív és injektív is.

35. Tétel. A $\varrho\colon A \to B$ leképezésnek az inverze akkor és csak akkor leképezés, ha ϱ bijektív.

36. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$ és $\sigma\colon B \to C$ leképezésekre

(1) ha ϱ és σ szürjektív, akkor $\varrho\sigma$ is szürjektív;
(2) ha ϱ és σ injektív, akkor $\varrho\sigma$ is injektív;
(3) ha ϱ és σ bijektív, akkor $\varrho\sigma$ is bijektív;
(4) ha $\varrho\sigma$ szürjektív, akkor σ szürjektív;
(5) ha $\varrho\sigma$ injektív, akkor ϱ injektív; és
(6) ha $\varrho\sigma$ bijektív, akkor ϱ injektív és σ szürjektív.

37. Tétel. Tetszőleges $\varrho\colon A \to B$, $\sigma\colon B \to C$ bijektív leképezésre

(1) ϱ^{-1} is bijektív,
(2) $\varrho\varrho^{-1} = \mathrm{id}_A$,
(3) $\varrho^{-1}\varrho = \mathrm{id}_B$,
(4) $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$.

38. Jelölés. Az A halmazból B-be menő összes leképezés halmazát B^A-val jelöljük. Az A-ból A-ba menő összes bijektív leképezés halmazát $\mathrm{Sym}(A)$-vel jelöljük.

3. Halmazok elemszáma

39. Definíció. Azt mondjuk, hogy az A és B halmazok elemszáma megegyezik, és azt írjuk, hogy $|A| = |B|$, ha létezik bijektív leképezés A-ból B-re. Azt mondjuk, hogy az A halmaz n-elemű, és azt írjuk, hogy $|A| = n$, ha n nemnegatív egész és létezik A-ból bijektív leképezés az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazra.

40. Példa. Az $\emptyset$ halmaz nulla elemű. Az $\{\emptyset\}$ halmaz egyelemű, mert $\{(\emptyset, 1)\}$ bijektív leképezés $\{\emptyset\}$-ból $\{1\}$-be.

41. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra

(1) $|A| = |A|$;
(2) ha $|A| = |B|$, akkor $|B| = |A|$;
(3) ha $|A| = |B|$ és $|B| = |C|$, akkor $|A| = |C|$;
(4) ha $|A| = |B|$, akkor $|A \times C| = |B \times C|$;
(5) ha $|A| = |B|$, akkor $|A^C| = |B^C|$;
(6) ha $|A| = |B|$, akkor $|C^A| = |C^B|$.

42. Tétel. Ha $|A| = n$, $|B| = m$ és az A és B halmazok diszjunktak, akkor $|A \cup B| = n + m$.

43. Tétel. Tetszőleges A halmazra $|\mathcal{P}(A)| = |\{0,1\}^A|$. Ha $|A| = n$, akkor $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$.

44. Tétel. Ha $|A| = n$ és $0 \le k \le n$, akkor $|\{\, B \in \mathcal{P}(A) : |B| = k \,\}| = \binom{n}{k}$.

45. Tétel. Ha $|A| = n$, akkor $|\,\mathrm{Sym}(A)| = n!$.

46. Tétel. Tetszőleges A, B halmazokra $|A \times B| = |B \times A|$. Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A \times B| = nm$.

47. Tétel. Tetszőleges A, B, C halmazokra ha B és C diszjunktak, akkor $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$. Ha $|A| = n$ és $|B| = m$, akkor $|A^B| = n^m$.

48. Tétel. Tetszőlegs A, B, C halmazokra $|(A^B)^C| = |A^{(B \times C)}|$.

49. Tétel. $|\mathbb{R}| \neq |\mathbb{N}|$

50. Definíció. Az A halmaz véges, ha létezik olyan n nemnegatív egész, hogy $|A| = n$. Az A halmaz megszámlálhatóan végtelen, ha $|A| = |\mathbb{N}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \aleph_0$. Az A halmaz megszámlálható, ha A véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az A halmaz kontinuum számosságú, ha $|A| = |\mathbb{R}|$, ekkor azt írjuk, hogy $|A| = \mathfrak{c}$.

51. Tétel. $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}[x]| = |\mathbb{Q}| = \aleph_0$, ahol $\mathbb{Z}[x]$ az egészegyütthatós polinomok halmaza (egészek olyan $(a_0, a_1, a_2, \dots)$ végtelen sorozatai, amelyek egy idő után azonosan nullák).

52. Tétel. $|\mathbb{R}| = |\{\, x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \,\}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |P(\mathbb{N})| = \mathfrak{c}$.

53. Tétel (Cantor-tétel). Tetszőleges A halmazra $|P(A)| \neq |A|$.

54. Tétel. Az A halmaz akkor és csak akkor véges, ha minden $f\colon A \to A$ injektív (szürjektív) leképezés bijektív.

55. Definíció. Ha létezik injektív leképezés A-ból B-be, akkor azt írjuk, hogy $|A| \leq |B|$.

56.* Tétel (Schröder-Bernstein-tétel). Tetszőleges A, B halmazokra ha léteznek $f\colon A \to B$ és $g\colon B \to A$ injektív leképezések, akkor létezik $h\colon A \to B$ bijektív leképezés is. Tehát ha $|A| \leq |B|$ és $|B| \leq |A|$, akkor $|A| = |B|$.

4. Axiomatikus felépítés

57. Példa (Russel-paradoxon). A 7. definíciót felhasználva definiáljuk az

$$R = \{x : x \text{ halmaz, és } x \notin x\}$$

halmazt. Ekkor se $R \in R$, se $R \notin R$ nem teljesülhet, tehát R nem lehet halmaz.

58. Megjegyzés. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében meg kell követelnünk, hogy a 7. definícióban szereplő U individuumtartomány csak halmaz lehet (például az összes halmaz összessége nem), és így elkerülhető a Russel-paradoxon.

59. Megjegyzés. Ha a 7. definíciót csak részhalmazok definiálására használhatjuk, akkor külön meg kell követelnünk, hogy létezik az üres halmaz, és tetszőleges A, B halmazokra léteznek az $\{A, B\}$, $A \cup B$ és $\mathcal{P}(A)$ halmazok is.

60.* Definició. Tetszőleges a, b elemekre definiáljuk az $(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$ rendezett elempárt. Ekkor az elempárról elvárt tulajdonságok teljesülnek.

61.* Megjegyzés. Az előbb megkövetelt halmazok létezésén kívül feltesszük még, hogy van végtelen halmaz (olyan A halmaz, hogy ha $x \in A$, akkor $x \cup \{x\} \in A$), és azt, hogy minden nemüres A halmaznak van olyan $x \in A$ eleme, hogy $A \cap x = \emptyset$.

62.* Definició. Az előző megjegyzésekben leírt tulajdonságok (végtelen sok) formulával formalizálhatók. Ezen formulák összességét nevezik a halmazelmélet Zermelo-Fraenkel axiómarendszerének, vagy röviden ZF-nek.

63.* Definició. Az I halmaz minden $i \in I$ elemére legyen adva egy nemüres A_i halmaz. Az

$$f\colon I \to \bigcup_{i \in I} A_i$$

leképezést kiválasztási függvénynek nevezzük, ha $f(i) \in A_i$ minden $i \in I$-re.

64.* Definició. A kiválasztási axióma az az állítás, hogy az előző definícióban tetszőlegesen megválasztva az I halmazt és a nemüres A_i halmazokat létezik kiválasztási függvény. A halmazelmélet ZFC axiómarendszere alatt a ZF axiómarendszert a kiválasztási axiómával együtt értjük.

65.* Tétel. Ha van interpretációja a halmazelméletnek (ZF), akkor van olyan is ahol a kiválasztási axióma teljesül, és olyan is ahol nem.

66.* Definició. A kontinuumhipotézis az az állítás, hogy tetszőleges A halmazra $|A| \leq |\mathbb{N}|$ vagy $|\mathbb{R}| \leq |A|$.

67.* Tétel. Ha van interpretációja a halmazelméletnek (ZFC), akkor van olyan is ahol a kontinuumhipotézis teljesül, és olyan is ahol nem.