# MBLK12: Algebrai struktúrák (levelező)

(előadásvázlat)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát, és $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m \times n$-es valós mátrixok halmazát, $\mathbb{Z}_m$ a modulo $m$ maradékosztályok halmazát.

## 1. Műveleti tulajdonságok

**1. Jelölés.** Legyen $A$ egy tetszőleges halmaz, jelölje $A^n$ az $n$-tényezős $A \times A \times \cdots \times A$ Descartes-szorzatot.

**2. Definíció.** Legyen $A$ tetszőleges nemüres halmaz, és $n \in \mathbb{N}_0$. Az $A$-n értelmezett *n-változós műveleten* egy $A^n \to A$ leképezést értünk, $n$-et a művelet változószámának (aritásának) nevezzük.

**3. Megjegyzés.** Az előző definíció $n = 0$ esetén egy elem kijelölését jelenti az $A$ halmazból.

**4. Tétel.** A $\mathbb{Z}_m$ halmazon művelet a következőképpen definiált összeadás, kivonás és szorzás:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}, \qquad \overline{a} - \overline{b} = \overline{a-b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

**5. Definíció.** Legyen $A$ tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{F}$ pedig jelölje az $A$-n értelmezett műveletek egy halmazát, ekkor az $(A; \mathcal{F})$ párt *algebrának* nevezzük.

**6. Példa.** Ha az előző definícióban szereplő $\mathcal{F}$ véges halmaz, akkor elemeit felsoroljuk a halmaz jelet elhagyva, például algebrák a következők: $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}; -)$, $(\mathbb{N}; 1, \cdot)$, $(\mathbb{R}^3; +)$, $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$, $(\mathbb{Z}; \min, \max)$, $(\mathbb{N}; \mathrm{lnko}, \mathrm{lkkt})$, $(\mathbb{Z}_{12}; +, \cdot)$, $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \emptyset, \overline{\phantom{x}}, \cap, \cup, \triangle)$, $(S_n; \cdot)$, $(S_n; \mathrm{id}, \cdot)$.

**7. Definíció.** Azokat az algebrákat, amelyeknek egy kétváltozós művelete van *grupoidnak* nevezzük.

**8. Példa.** A 6. példában megadott algebrák közül a következők grupoidok: $(\mathbb{Z}; -)$, $(\mathbb{R}^2; +)$, $(S_n; \cdot)$.

**9. Definíció.** (Grupoid műveleti tulajdonságai)

(1) Az $(A; \circ)$ grupoid *idempotens*, ha $(\forall a \in A)(a \circ a = a)$.
(2) Az $(A; \circ)$ grupoid *asszociatív*, ha $(\forall a, b, c \in A)\big(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c\big)$.
(3) Az $(A; \circ)$ grupoid *kommutatív*, ha $(\forall a, b \in A)(a \circ b = b \circ a)$.
(4) Az $(A; \circ)$ grupoidban van *zéruselem*, ha $(\exists o \in A)(\forall a \in A)(a \circ o = o \circ a = o)$.
(5) Az $(A; \circ)$ grupoidban van *egységelem*, ha $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(a \circ e = e \circ a = a)$.
(6) Ha az $(A; \circ)$ grupoidban $e$ egységelem, és $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(a \circ b = b \circ a = e)$, akkor minden elemnek van *inverze*.

**10. Tétel.** Bármely grupoidban legfeljebb egy egységelem és legfeljebb egy zéruselem van.

**11. Definíció.** Ha a grupoidnak van egységeleme, *egységelemes*, ha van zéruseleme, *zéruselemes* grupoidnak nevezzük.

**12. Példa.** Olyan grupoidokra adunk példát, melyek a 9. definícióban szereplő tulajdonságokkal rendelkeznek.

(1) Idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z}; \min), (\mathbb{N}; \mathrm{lkkt}), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \vee), (\mathcal{P}(U); \cap)$.
(2) Asszociatív grupoidok: $(\mathbb{N}; \cdot), (\mathbb{R}^3; +), (\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot), (\mathbb{N}; \mathrm{lnko}), (\mathbb{Z}; \max), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \wedge), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \leftrightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \cup), (\mathcal{P}(U); \triangle), (A^A; \cdot), (S_n; \cdot)$.
(3) Kommutatív grupoidok: $(\mathbb{N}; \cdot), (\mathbb{R}^3; +), (\mathbb{N}; \mathrm{lnko}), (\mathbb{Z}; \max), (\mathbb{Z}_4; +), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \wedge), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \leftrightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \cup), (\mathcal{P}(U); \triangle)$.
(4) Zéruselemes grupoidok:

| grupoid | zéruselem |
|---|---|
| $(\mathbb{Z};\cdot)$ | $0$ |
| $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$ | $\left(\begin{smallmatrix}0&0\\0&0\end{smallmatrix}\right)$ |
| $(\mathbb{N};\mathrm{lnko})$ | $1$ |
| $(\mathbb{Z}_3;\cdot)$ | $\overline{0}$ |
| $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ | $\mathbf{h}$ |
| $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee)$ | $\mathbf{i}$ |
| $(\mathcal{P}(U);\cap)$ | $\emptyset$ |
| $(\mathcal{P}(U);\cup)$ | $U$ |

(5) Egységelemes grupoidok:

| grupoid | egységelem |
|---|---|
| $(\mathbb{Z};\cdot)$ | $1$ |
| $(\mathbb{Z};+)$ | $0$ |
| $(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot)$ | $\left(\begin{smallmatrix}1&0\\0&1\end{smallmatrix}\right)$ |
| $(\mathbb{Z}_3;\cdot)$ | $\overline{1}$ |
| $(\mathbb{Z}_4;+)$ | $\overline{0}$ |
| $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge)$ | $\mathbf{i}$ |
| $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$ | $\mathbf{i}$ |
| $(\mathcal{P}(U);\cup)$ | $\emptyset$ |
| $(\mathcal{P}(U);\triangle)$ | $\emptyset$ |
| $A^A$ | $\mathrm{id}_A$ |
| $(S_n;\cdot)$ | $\mathrm{id}$ |

(6) Egységelmeles grupoidok, ahol minden elemnek van inverze:

| grupoid | $a$ inverze |
|---|---|
| $(\mathbb{Z};+)$ | $-a$ |
| $(\mathbb{R}^3;+)$ | $-a$ |
| $(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$ | $\frac{1}{a}$ |
| $(\mathbb{Z}_3\setminus\{\overline{0}\};\cdot)$ | $a$ |
| $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$ | $a$ |
| $(\mathcal{P}(U);\triangle)$ | $a$ |
| $(S_n;\cdot)$ | $a^{-1}$ |

**13. Példa.** Olyan grupoidokra adunk példát, melyek NEM rendelkeznek a 9. definícióban szereplő tulajdonságokkal.

(1) Nem idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\mathbb{Z}_4;+),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.

(2) Nem asszociatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.

(3) Nem kommutatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.

(4) Grupoidok, ahol nincs zéruselem: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Z};+),(\mathbb{N};\cdot),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{Z}_4;+),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(S_n;\cdot)$.

(5) Grupoidok, ahol nincs egységelem: $(\mathbb{N};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.

(6) Egységelemes grupoidok, ahol nincs minden elemnek inverze: $(\mathbb{N}_0;+),(\mathbb{Z};\cdot),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),$ $(\mathbb{Z}_3;\cdot),(\mathbb{Z}_4;\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee),(\mathcal{P}(U);\cap),(\mathcal{P}(U);\cup),(A^A;\cdot)$.

**14. Definíció.** Legyen $\circ$ és $\star$ két kétváltozó művelet az $A$ halmazon.

(1) A $\circ$ disztributív a $\star$-ra nézve, ha
$$(\forall a,b,c\in A)((a\circ(b\star c)=(a\circ b)\star(a\circ c))\wedge((b\star c)\circ a=(b\circ a)\star(c\circ a))).$$

(2) A $\circ$ abszorptív a $\star$-ra nézve, ha
$$(\forall a,b\in A)\big((a\circ(a\star b)=a)\wedge((a\star b)\circ a=a)\big).$$

**15. Példa.** Az 14. definícióban szereplő fogalmakra adunk példát.

(1) Az $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ halmazon a $\cdot$ disztributív a $+$-ra. Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko disztributív a lkkt-re, és a lkkt is disztributív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ disztributív a $\vee$-ra, és fordítva,

a $\vee$ is disztributív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ disztributív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is disztributív a $\cap$-ra, továbbá a $\cap$ disztributív a $\triangle$-ra.

(2) Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko abszorptív a lkkt-re, és a lkkt is abszorptív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ abszorptív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is abszorptív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ abszorptív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is abszorptív a $\cap$-ra.

**16. Példa.** Olyan műveletekre adunk példát, amelyek NEM teljesítik az 14. definícióban megadott tulajdonságokat.

(1) Az $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ halmazon a $+$ nem disztributív a $\cdot$ -ra. Az $\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$ halmazon az $\rightarrow$ nem disztributív a $\vee$-ra.

(2) Az $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{Z}, \mathbb{N}$ halmazon a $\cdot$ nem abszorptív a $+$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon az $\cup$ nem abszorptív a $\triangle$-ra.

## 2. Félcsoport, csoport

**17. Definíció.** Az asszociatív grupoidokat félcsoportnak nevezzük. Az egységelmes félcsoportokat monoidnak nevezzük. Azokat a monoidokat, ahol minden elemnek van inverze csoportoknak hívjuk. A kommutatív csoportokat Abel-csoportoknak nevezzük.

**18. Példa.** Az $(\mathbb{N}; +)$ félcsoport, de nem monoid.

**19. Példa.** A következők monoidok, de nem csoportok: $(\mathbb{N}; \cdot)$, $(\mathbb{N}_0; +)$, $(\mathbb{R}; \cdot)$, $(\mathbb{R}^{n\times n}; \cdot)$, $(\mathbb{Z}_n; \cdot)$, $(\mathcal{P}(U); \cup)$.

**20. Példa.** A következők csoportok, de nem (feltétlen) Abel-csoportok: $(S_n; \cdot)$, melynek neve a teljes szimmetrikus csoport, és az $(\{\, M \in \mathbb{R}^{n\times n} : |M| \neq 0 \,\}; \cdot)$, melynek neve az általános lineáris csoport.

**21. Példa.** A következők Abel-csoportok: $(\mathbb{Z}; +)$, $(\mathbb{Z}_n; +)$, $(\mathbb{R} \setminus \{0\}; \cdot)$, $(\mathbb{R}^{n\times m}; +)$, $(\mathcal{P}(U); \triangle)$, $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \leftrightarrow)$.

**22. Tétel.** Az $(A; \cdot)$ monoidban minden elemnek legfeljebb egy inverze van. Ha az $a, b$ elemnek van inverze: $a^{-1}, b^{-1}$, akkor az $a^{-1}$ és $ab$ elemeknek is van inverze, mégpedig

(1) $(a^{-1})^{-1} = a$,
(2) $(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1}$.

**23. Példa.** Az $(\mathbb{R}^{n\times n}; \cdot)$ monoidban pontosan a nem nulla determinánsú elemeknek van inverze, és éppen ezek az elemek alkotják az általános lineáris csoportot.

**24. Megjegyzés.** Tudjuk, hogy csoportban az egységelem és az elemek inverze egyértelműen meghatározott, de nem mindig egyértelmű, hogy ezeket hogyan is jelöljük. Ha ez meg szeretnénk adni, akkor a $(A; \cdot)$ helyett $(A; \cdot, {}^{-1}, 1)$-et írunk, ahol a második művelet az 1-változós inverzképzés, és 1 az egységelem (0-változós művelet). A csoportok multiplikatív írásmódja alatt a $(A; \cdot, {}^{-1}, 1)$ műveleti szimbólumokat értjük. Az additív írásmód alatt a $(A; +, -, 0)$ műveleti szimbólumokat értjük, és általában csak akkor használjuk, ha a csoport kommutatív.

**25. Definíció.** Legyen $(A; \cdot, {}^{-1}, 1)$ tetszőleges csoport. Az $a \in A$ elem $n$-edik hatványát $(n \in \mathbb{Z})$ a következőképpen definiáljuk:

$$a^n = \begin{cases} \underbrace{a \cdots a}_{n \text{ db}}, & \text{ha } n > 0, \\ 1, & \text{ha } n = 0, \\ \underbrace{a^{-1} \cdots a^{-1}}_{-n \text{ db}}, & \text{ha } n < 0. \end{cases}$$

Ha az $(A;+,-,0)$ csoport additív írásmódban van megadva, akkor a hatványozást $n\cdot a$-val jelöljük, de ugyan úgy definiáljuk mint a multiplikatív írásmódnál:

$$n\cdot a=\begin{cases}\underbrace{a+\cdots+a}_{n\text{ db}}, & \text{ha } n>0,\\ 0, & \text{ha } n=0,\\ \underbrace{(-a)+\cdots+(-a)}_{-n\text{ db}}, & \text{ha } n<0.\end{cases}$$

**26. Lemma.** Legyen $(A;\cdot,{}^{-1},1)$ tetszőleges csoport, $a\in A$ és $n\in\mathbb{Z}$. Ekkor $a^n\cdot a=a\cdot a^n=a^{n+1}$ és $a^{-1}\cdot a^n=a^n\cdot a^{-1}=a^{n-1}$.

**27.* Tétel.** Legyen $(A;\cdot)$ tetszőleges csoport. Bármely $m,n\in\mathbb{Z}$-re és $a,b\in A$-ra

(1) $a^ma^n=a^{m+n}$,
(2) $(a^m)^n=a^{mn}$,
(3) ha $ab=ba$, akkor $(ab)^n=a^nb^n$.

**28. Példa.** Az $(\mathbb{R}\setminus\{0\};.)$ csoportban az $a=2$ elem harmadik hatványa 8, mert $2\cdot2\cdot2=8$. Az $(\mathbb{R};+)$ csoportban az $a=2$ elem harmadik hatványa viszont 6, mert $2+2+2=6$.

**29. Definíció.** Legyen $(A;\cdot)$ csoport. Az $a\in A$ elem rendje az a legkisebb pozitív egész $n\in\mathbb{N}$, amelyre $a^n=1$. Ha ilyen nincs, akkor $a$ rendje végtelen. Az elem rendjét $o(a)$-val jelöljük.

**30. Példa.** A $(\mathbb{Z}_6;+)$ csoportban $o(\overline{4})=3$, mert $3\cdot\overline{4}=\overline{0}$, azaz a harmadik hatvány az egységelem, de a kisebb hatványok nem az egységelemet adják. Az $(S_5;\cdot)$ csoportban $o((1\ 2\ 3)(4\ 5))=6$, mert a ciklusok függetlenek, azaz felcserélhetőek, így külön hatványozhatóak.

**31. Tétel.** Legyen $(A;\cdot)$ csoport, $a\in A$ véges rendű elem, és $n,m\in\mathbb{Z}$-re

(1) $a^n=1$ akkor és csak akkor teljesül, ha $o(a)\mid n$,
(2) $a^n=a^m$ akkor és csak akkor teljesül, ha $n\equiv m \pmod{o(a)}$.

**32. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy az előző tételnél az (1) speciális esete a (2)-nek $m=0$-ra.

**33.* Tétel.** Legyen $(A;\cdot)$ csoport, és $a,b\in A$ felcserélhető elemek, azaz $ab=ba$. Ekkor $o(ab)=o(a)o(b)$ akkor és csak akkor, ha $\mathrm{lnko}(o(a),o(b))=1$.

## 3. Gyűrű, test

**34. Definíció.** Az $(A;+,\cdot)$ algebrát gyűrűnek nevezzük, ha $(A;+)$ Abel-csoport, $(A;\cdot)$ félcsoport, és a $\cdot$ disztributív az $+$-ra. Az $(A;+)$ Abel-csoportot a gyűrű additív csoportjának, az $(A;\cdot)$ félcsoportot a gyűrű multiplikatív félcsoportjának nevezzük.

**35. Példa.** Gyűrűk: $(\mathbb{Z};+,\cdot)$, $(\mathbb{R};+,\cdot)$, $(\mathbb{R}^{2\times2};+,\cdot)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow,\vee)$, $(\mathcal{P}(U);\triangle,\cap)$, $(\mathbb{Z}_5;+,\cdot)$.

**36. Tétel.** Az $(A;+,\cdot)$ gyűrű esetén a 0 additív egységelem a szorzásra nézve zéruselem. Továbbá tetszőleges $a,b\in A$ elemekre $(-a)b=a(-b)=-(ab)$.

**37. Definíció.** Az $(A;+,\cdot)$ gyűrűt testnek nevezzük, ha az $(A\setminus\{0\};\cdot)$ Abel-csoportot alkot, amelyet a test multiplikatív csoportjának nevezzük.

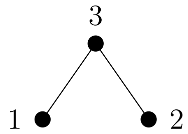
**38. Tétel.** A $(\mathbb{Z}_n;+,\cdot)$ gyűrű pontosan akkor test, ha $n$ prím.

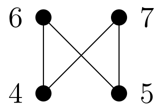
**39. Példa.** A 35. példában felsorolt gyűrűk közül testek: $(\mathbb{R};+,\cdot)$, $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow,\vee)$, $(\mathbb{Z}_5;+,\cdot)$.

## 4. Háló

**40. Definíció.** Legyen $(A;\leq)$ részbenrendezett halmaz. Az $a,b\in A$ elemeknek $c\in A$ felső korlátja, ha $a\leq c$ és $b\leq c$. Az $a,b$ elemeknek $d\in A$ legkisebb felső korlátja, ha $d$ felső korlát, és $a,b$ minden $c$ felső korlátjára $d\leq c$. Duális módon definiálhatjuk a alsó korlátot és a legnagyobb alsó korlátot.

**41. Példa.** Az alábbi ábrán látható az első részbenrendezésben az 1, 2 elemeknek csak egy felső korlátjuk van, ami a legkisebb is egyben, de nincsen alsó korlátjuk. A második részbenrendezésben a 4, 5 elemeknek két felső korlátjuk van, de nincsen legkisebb felső korlátjuk.




**42. Tétel.** Tetszőleges részbenrendezett halmaz bármely két elemének legfeljebb csak egy legkisebb felső korlátja (legnagyobb alsó korlátja) van.

**43. Definíció.** Az $(A; \leq)$ részbenrendezett halmaz hálószerűen rendezett halmaz, ha tetszőleges $a, b \in A$ elemeknek van legkisebb felső korlátjuk, melyet $a \vee b$-vel jelölünk és az $a, b$ elemek egyesítésnek nevezzük, illetve legnagyobb alsó korlátjuk, melyet $a \wedge b$-vel jelölünk és az $a, b$ elemek metszetnek nevezzük.

**44. Példa.** Az előző példában szereplő részbenrendezések nem hálószerűen rendezettek. Az $(\mathbb{N}_0; |)$ hálószerűen rendezett halmaz, amelyben az egyesítés a legkisebb közös többszörös és a metszet a legnagyobb közös osztó. Az $(\mathbb{R}; \leq)$ hálószerűen rendezett halmaz, ahol az egyesítés a maximum és a metszet a minimum. A $(\mathcal{P}(U); \subseteq)$ hálószerűen rendezett halmaz, ahol a halmazelméleti egyesítés és metszet a legkiseb felső korlát és legnagyobb alsó korlát.

**45.* Tétel.** Legyen $(A; \leq)$ hálószerűen rendezett halmaz. Ekkor az $\wedge$ és $\vee$ műveletek idempotensek, kommutatívak, és asszociatívak, illetve $\wedge$ abszorptív az $\vee$-re és $\vee$ abszorptív a $\wedge$-re.

**46. Definíció.** Az $(A; \wedge, \vee)$ algebrát hálónak nevezzük, ha a kétváltozós $\wedge$ és $\vee$ műveletek idempotensek, kommutatívak, és asszociatívak, illetve kölcsönösen abszorptívak egymásra.

**47. Tétel.** Ha adott az $(A; \wedge, \vee)$ háló, akkor az

$$a \leq b \iff a \wedge b = a$$

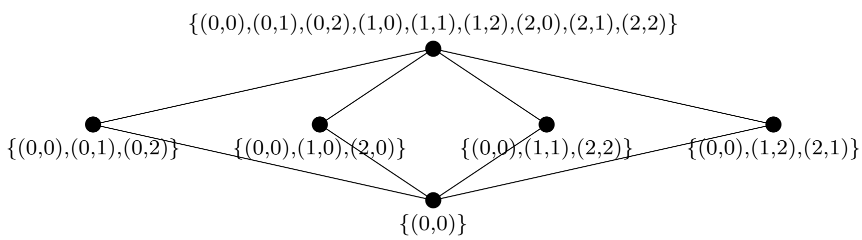
feltétel által definiált $\leq$ relációval $(A; \leq)$ hálószerűen rendezett halmaz, amelyben $a, b \in A$ legkisebb felső korlátja $a \vee b$ és legnagyobb alsó korlátja $a \wedge b$.

**48.* Tétel.** Adott alaphalmazon a hálószerűen rendezett halmazok és a hálók természetes módon (az előző két tétel szerint) megfeleltethetők egymásnak.

**49. Példa.** Az $(\mathbb{N}_0; \mathrm{lnko}, \mathrm{lkkt})$, $(\mathbb{R}; \min, \max)$, $(\mathbb{R}; \max, \min)$, $(\mathcal{P}(U); \cap, \cup)$, $(\{\mathbf{h}, \mathbf{i}\}, \wedge, \vee)$ algebrák hálók.

**50. Példa.** Az $\mathbb{R}^n$ alterei a tartalmazásra nézve hálószerűen rendezett halmazt alkotnak. Ha $U, V \leq \mathbb{R}^n$ két altér, akkor metszetük $U \cap V$ és egyesítésük $U + V = \{\, u + v : u \in U, v \in V \,\}$.

**51.* Példa.** A $\mathbb{Z}_3$ test feletti 2-dimenziós $\mathbb{Z}_3^2$ vektortér altereinek hálója a következő:




$\mathbb{Z}_2^3$ altereinek Hasse-diagrammja már lényegesen bonyolultabb (1 db 0-dimenziós, 7 db 1-dimenziós, 7 db 2-dimenziós és 1 db 3-dimenziós altere van):