Szorgalmi feladatok

5. Algebrai struktúrák

1. Feladat. (2 pt.) Mutassuk meg, hogy ha egy monoidban egy elemnek van bal- és jobbinverze, akkor ezek egyenlők, és ennek az elemnek nem lehet több bal- és jobbinverze.

2. Feladat. (3 pt.) Adjunk példát olyan félcsoportra, melyben több balegységelem és több jobbzéruselem van.

3. Feladat. (3 pt.) Adjunk példát olyan monoidra, melyben van olyan elem, melynek több balinverze van és van olyan elem is, melynek több jobbinverze van.

4. Feladat. (2 pt.) Tegyük fel, hogy az S halmazon definiált szorzásra teljesül, hogy S-ben van egységelem és $a(bc) = b(ac)$ minden $a, b, c \in S$ esetén. Igazoljuk, hogy S kommutatív félcsoport.

5. Feladat. (3 pt.) Igazoljuk, hogy minden véges félcsoportban van olyan elem melynek a négyzete önmaga. (A félcsoport művelete szorzás a feladatban.)

6. Feladat. (3 pt.) Tegyük fel, hogy az S félcsoportban a szorzás rendelkezik a következő tulajdonsággal: S-ben létezik egy e balegységelem úgy, hogy minden s($\in S$) elemhez található olyan $s' \in S$, hogy $s's = e$. Bizonyítsuk, hogy S csoportot alkot az említett szorzásra nézve

7. Feladat. (2 pt.) Igazoljuk, hogy tetszőleges csoport tetszőleges a, b elemeire az a és $b^{-1}ab$ elemek rendje megegyezik.

8. Feladat. (3 pt.) Igazoljuk, hogy tetszőleges csoport tetszőleges véges rendű a elemére $o(a^k) = o(a)/\mathrm{lnko}(k, o(a))$.

9. Feladat. (3 pt.) Igazoljuk, hogy ha a, b két véges rendű elem a G Abel-csoportban, akkor létezik $c \in G$, melyre $o(c) = \mathrm{lkkt}(o(a), o(b))$.

10. Feladat. (3 pt.) Mutassuk meg, hogy véges Abel-csoportokban a legnagyobb elemrend minden elem rendjének a többszöröse.

11. Feladat. (3 pt.) Legyen A egy nemüres halmaz és $f : A^3 \to A$ olyan, hogy minden $x, y \in A$ esetén

$$f(x, y, y) = f(y, y, x) = x,$$

és minden $x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3, z_1, z_2, z_3 \in A$ esetén

$$f(f(x_,x_2, x_3), f(y_1, y_2, y_3), f(z_1, z_2, z_3)) =$$
$$f(f(x_1, y_1, z_1), f(x_2, y_2, z_2), f(x_3, y_3, z_3)).$$

Bizonyítsuk be, hogy egy tetszőleges, de rögzített $a \in A$ esetén A Abel-csoport az $x + y = f(x, a, y)$ műveletre nézve.