Szorgalmi feladatok

4. Relációk

1. Feladat. (1 pt.) Hány ekvivalenciareláció adható meg egy kételemű alaphalmazon? És három- illetve négyelemű halmazon?

2. Feladat. (2 pt.) Megadható-e egy 8 elemű alaphalmazon olyan ekvivalenciareláció, amely pontosan 40 elempárból áll? És olyan, ami pontosan 41 elempárból áll?

3. Feladat. (2 pt.) Mutassa meg, hogy a ϱ pontosan akkor ekvivalencia, ha reflexív és $\varrho\varrho^{-1} \subseteq \varrho$.

4. Feladat. (3 pt.) Megszámlálhatóan végtelen sok rabot tartóztatnak le szervezett bűnözésért, de nincs számukra hely a börtönben, ezért a bíró a következő lehetőséget ajánlja fel nekik a szabadulásra. Minden rab kap egy kék vagy piros sapkát, de senki sem látja a sajátját. Ezek után sorbaállítják őket úgy, hogy mindenki a sor elejének háttal áll, és látja az utána következő társait. (Ismerik egymást és végtelen messze látnak, tehát pontosan tudják kik és milyen sorrendben állnak abban az irányban, amerre néznek.) A feladatuk az, hogy a sor elejétől indulva tippeljék meg a saját sapkájuk színét – aki eltalálja, szabadon engedtetik, aki nem, azt kivégzik. A rabok nem hallják a többiek válaszát. Előre összebeszélhetnek. Milyen stratégiával érhetik el, hogy véges sokukat kivéve a többi biztosan megmeneküljön?

5. Feladat. (1 pt.) Melyek azok a relációk, amelyek egyszerre szimmetrikusak és antiszimmetrikusak is?

6. Feladat. (2 pt.) Igaz-e, hogy a szimmetrikus és tranzitív relációk reflexívek? Valaki a következő bizonyítást adta.
Legyen ϱ egy szimmetrikus és tranzitív reláció az R halmazon. Mivel ϱ szimmetrikus, minden $x, y \in R$ esetén $(x, y) \in \varrho$ fennálásából következik $(y, x) \in \varrho$. A tranzitivitás miatt pedig $(x, y) \in \varrho$ és $(y, x) \in \varrho$ fennállásából következik, hogy $(x, x) \in \varrho$. Tehát ϱ reflexív. Helyes ez a bizonyítás?

7. Feladat. (2 pt.) Aszerint, hogy a reflexivitás, szimmetria és tranzitivitás tulajdonságok közül melyek teljesülnek, egy reláció 8-féle lehet. Adjon példát azokra a lehetőségekre melyek előfordulhatnak és igazolja, ha valami nem fordulhat elő.

8. Feladat. (2 pt.) Végezze el a 7. Feladatbeli analízist a reflexivitás, antiszimmetria és tranzitivitás tulajdonsághármasra is.

9. Feladat. (2 pt.) Végezze el a 7. Feladatbeli analízist a reflexivitás, dichotómia és tranzitivitás tulajdonsághármasra is.

10. Feladat. (2 pt.) Vizsgálja meg, hogy a relációszorzás megőrzi-e a tanult relációtulajdonságokat. (Azaz pl. két reflexív reláció szorzata szükségképpen reflexív-e?)

11. Feladat. (1 pt.) Rajzolja le az összes $2, 3$ illetve 4 pontú Hasse-diagramot.

12. Feladat. (2 pt.) Rajzoljon olyan Hasse-diagramot, amelyben egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.

13. Feladat. (3 pt.) Igazoljuk, hogy minden részbenrendezett halmaz alkalmas A halmazra beágyazható $(P(A); \subseteq)$-ba. $(P; \leq)$ részbenrendezett halmaz beágyazható a $(Q; \leq)$ részbenrendezett halmazba, ha létezik $\varphi : P \to Q$ injektív leképezés, melyre minden $a, b \in P$ esetén

$$a \leq b \Rightarrow \varphi(a) \leq \varphi(b) \quad \text{és} \quad a \nleq b \Rightarrow \varphi(a) \nleq \varphi(b).$$

14. Feladat. (3 pt.) Egy részbenrendezett halmazban egy $\{p_1, p_2, \dots\}$ részhalmazt láncnak nevezünk, ha $p_1 < p_2 < p_3 \dots$ vagy $p_1 > p_2 > p_3 \dots$ (az elemek valamilyen sorrendjében) és antiláncnak nevezzük, ha bármely két különböző eleme összehasonlíthatatlan. Bizonyítsuk be, hogy ha egy részbenrendezett halmazban nincs végtelen lánc és antilánc sem, akkor a részbenrendezett halmaz véges.