Szorgalmi feladatok

3. Halmazok, leképezések, permutációk

1. Feladat. (2 pt.) Mutassa meg, hogy $A \subseteq B$ ekvivalens a következőkkel
(1) $A \cup B = B$;
(2) $A \cap B = A$;
(3) $A \setminus B = \emptyset$.

2. Feladat. (2 pt.) Tegyük fel, hogy $A \cup B = C \cup D$ és $A \cap B = C \cap D = \emptyset$. Mutassa meg, hogy ekkor léteznek olyan egyértemű́en meghatározott diszjunkt E, F, G, H halmazok, amelyekre $A = E \cup F$, $B = G \cup H$, $C = E \cup G$ és $D = F \cup H$.

3. Feladat. (2 pt.) Bizonyítsa be, hogy az A, B halmazokhoz pontosan akkor van olyan X halmaz, amelyre $A \setminus X = B$, ha $A \triangle B \subseteq A$

4. Feladat. (1 pt.) Fejezze ki a $\cap$ műveletet úgy, hogy csak a $\setminus$ műveletet használja.

5. Feladat. (2 pt.) Fejezze ki az $\cup, \cap$ és $\setminus$ műveleteket a
(1) $\triangle$ és $\cap$;
(2) $\triangle$ és $\cup$;
(3) $\triangle$ és $\setminus$
segítségével.

6. Feladat. (2 pt.) Igazolja, hogy $(A_1 \triangle (A_2 \triangle \cdots \triangle A_n)) \dots)$ pontosan azokból az elemekből áll, amelyek páratlan sok A_i-be tartoznak.

7. Feladat. (2 pt.) Adott 2075 halmaz, melynek mindegyike 46 elemű, és bármely két halmaz uniója 91 elemből áll. Hány elemből áll a 2075 halmaz uniója?

8. Feladat. (3 pt.) Legyen $U = \{1, 2, \dots, n\}$, $A_1, A_2, \dots, A_m \subseteq U$ páronként különböző halmazok, és bármely két különböző i, j indexre az $A_i \cap A_j$ tartalmaz két szomszédos természetes számot U-ból. Bizonyítsa be, hogy $m \leq 2^{n-2}$.

9. Feladat. (2 pt.) Bizonyítsa be, hogy az $f : A \to B$ leképezés akkor és csak akkor injektív, ha valahányszor $g : C \to A$ és $g' : C \to A$ olyan leképezések, hogy $gf = g'f$, mindannyiszor $g = g'$.

10. Feladat. (3 pt.) Fogalmazza meg és bizonyítsa be a 9. Feladat analógját szürjektív leképezésekre.

11. Feladat. (3 pt.) Bizonyítsa be, hogy a „Minden szürjektív leképezésnek van balinverze." állítás ekvivalens a kiválasztási axiómával. (A $g : B \to A$ leképezés az $f : A \to B$ balinverze, ha $xgf = x$ minden $x \in B$ esetén.)

12. Feladat. (3 pt.) Mutassa meg, hogy egy folytonos valós ($\mathbb{R} \to \mathbb{R}$) függvény (=leképezés) pontosan akkor injektív, ha szigorúan monoton.

13. Feladat. (1 pt.) Egy főzőklubról a következőket tudjuk:
(1) A klub minden tagja főzött már legalább egy klubtagnak.

(2) A klubtagok sohasem főznek saját maguknak.
(3) Nincs olyan klubtag, akinek egynél több klubtag főz.
(4) Van olyan klubtag, akinek senki se főzött.

Hány tagja lehet a főzőklubnak?

14. Feladat. (1 pt.) Mutassa meg, hogy ha $|A \setminus B| = |B \setminus A|$, akkor $|A| = |B|$.

15. Feladat. (3 pt.) Igazolja tetszőleges halmazokra, hogy ha $C \subseteq A$, $B \subseteq D$ és $|C \cup D| = |C|$, akkor $|A \cup B| = |A|$.

16. Feladat. (2 pt.) Adjon meg bijekciót a nemnegatív egész számokból képezhető (végtelen) sorozatok és a 0-1 (végtelen) sorozatok halmazai között.

17. Feladat. (3 pt.) Adjon meg bijekciót a $0, 1, 2$ számokból képzett (végtelen) sorozatok és a 0-1 (végtelen) sorozatok halmazai között.

18. Feladat. (2 pt.) Igazolja, hogy a számegyenes tetszőleges diszjunkt nyílt intervallumaiból álló halmaz megszámlálható.

19. Feladat. (3 pt.) Mutassa meg, hogyha S egy olyan ponthalmaz a síkon, melyre igaz, hogy bármely két pontjának távolsága racionális, akkor S megszámlálható.

20. Feladat. (3 pt.) Legkevesebb hány tranzpozíció szorzatára bontható fel a $(12 \ldots n)$ ciklus?

21. Feladat. (3 pt.) Bizonyítsa be, hogy egy permutáció akkor és csak akkor egy ciklus hatványa, ha előáll egyenlő hosszúságú idegen ciklusok szorzataként.

22. Feladat. (3 pt.) Bizonyítsa be, hogy a következő halmazok elemeiből S_n összes eleme előállítható (permutáció)szorzással (azaz generálják S_n-t):
(a) $\{(1k) : k = 2, 3, \ldots, n\}$;
(b) $\{(12), (12 \ldots n)\}$.

23. Feladat. (3 pt.) Bizonyítsa be, hogy a következő halmazok elemeiből S_n összes eleme előállítható (permutáció)szorzással (azaz generálják S_n-t):
(a) $\{(12 \ldots n-1), (n-1\ n)\}$;
(b) $\{(12), (23), \ldots, (n-1\ n)\}$.