Szorgalmi feladatok

1. Számelmélet

1. Feladat. (1 pt.) Mennyi lehet két szomszédos Fibonacci-szám legnagyobb közös osztója?

2. Feladat. (2 pt.) Mutassuk meg, hogy ha a és b relatív prímek, akkor ab és $a+b$ is azok.

3. Feladat. (3 pt.) Mennyi a^n-1 és a^m-1 legnagyobb közös osztója?

4. Feladat. (1 pt.) Mely n természetes számok esetén lehet egyszerűsíteni a $\frac{3n+2}{4n+1}$ törtet?

5. Feladat. (3 pt.) Legyen $t(x)=\frac{1}{\{x\}}$, ha $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$. Egy α valós számból kiindulva képezzük sorra a $t(\alpha)$, $t(t(\alpha))$, $t(t(t(\alpha)))$, $\ldots$ számokat. Mutassa meg, hogy a sorozat akkor és csak akkor szakad meg, ha α racionális szám.

6. Feladat. (3 pt.) Határozza meg a $t(x)$ függvény *fixpontjait*, vagyis mindazokat az α valós számokat, amelyekre $t(\alpha)=\alpha$.

7. Feladat. (1 pt.) Mutassa meg, hogy 2^n-1 csak akkor lehet prím, ha n is az. (Mersenne-prímek)

8. Feladat. (2 pt.) Mutassa meg, hogy 2^n+1 csak akkor lehet prím, ha n kettőhatvány. (Fermat-prímek)

9. Feladat. (3 pt.) Legyen f egy olyan egész együtthatós másodfokú polinom, amelyre $f(k)$ osztható 5-tel minden k egész számra. Mutassa meg, hogy f minden együtthatója 5-tel osztható. Mi a helyzet magasabbfokú polinomokkal? És ha 5 helyett más (prím)számot veszünk?

10. Feladat. (1 pt.) Mely p prímszámokra lesz $29p+1$ négyzetszám?

11. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy bármely p prímszámra és $k<p$ pozitív egészre $\binom{p}{k}$ osztható p-vel.

12. Feladat. (2 pt.) Legyenek a és b pozitív egész számok, amelyekre $a^3=b^2$ teljesül. Mutassa meg, hogy ekkor létezik olyan k pozitív egész, amelyre $a=k^2$ és $b=k^3$.

13. Feladat. (3 pt.) Jelölje $\nu_p(n)$-nel az n természetes szám prímtényezős felbontásában a p prím kitevőjét. (Tehát $\nu_p(n)=k$ akkor és csak akkor, ha $p^k \mid n$ és $p^{k+1} \nmid n$.) Igazolja, hogy minden n pozitív egészre $\nu_2\big((n+1)\cdot(n+2)\cdot\ldots\cdot(2n)\big)=n$.

14. Feladat. (2 pt.) Határozza meg $7+7^2+7^3+\cdots+7^{4000}$ utolsó két számjegyét.

15. Feladat. (2 pt.) Mutassa meg, hogy ha m páratlan prímhatvány, akkor az $x^2 \equiv 1 \pmod{m}$ kongruenciának csak két megoldása van: $x \equiv \pm 1 \pmod{m}$. Igaz marad-e az állítás, ha m nem prímhatvány?

16. Feladat. (1 pt.) Bizonyítsa be, hogy a Fibonacci-sorozat minden negyedik tagja osztható hárommal.

17. Feladat. (2 pt.) Milyen számjegyeket kell írni a és b helyére, hogy $\overline{1456ab}$ osztható legyen 41-gyel?

18. Feladat. (3 pt.) Négy egymást követő pozitív egész közül legalább az egyik összetett, hasonlóan öt egymást követő páratlan szám közül legalább az egyik összetett (ugye?). Mutassa meg, hogy tetszőleges pozitív egészekből álló számtani sorozathoz lehet találni olyan K számot, hogy a számtani sorozat bármely K egymást követő tagja között van összetett szám.

19. Feladat. (1 pt.) Oldja meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze" az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

20. Feladat. (1 pt.) Melyek azok a természetes számok, amelyek négyzete tízes számrendszerben 29-re végződik? (Akárcsak az előző feladatnál, itt is használható a kínai maradéktétel.)

21. Feladat. (1 pt.) Mennyit ad maradékul 31-gyel osztva $33 \cdot \ldots \cdot 59$?

22. Feladat. (1 pt.) Mutassa meg, hogy ha $n > 4$ összetett szám, akkor $(n-1)! \equiv 0 \pmod{n}$. (Ebből következik, hogy Wilson tételének a megfordítása is igaz.)

23. Feladat. (3 pt.) Bizonyítsa be, hogy $\left(\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right)^2 \equiv (-1)^{\frac{p+1}{2}} \pmod{p}$ tetszőleges páratlan p prímszámra.

24. Feladat. (2 pt.) Mennyi lehet az n természetes szám értéke, ha $\varphi(n) = 1210$? (Határozzuk meg az összes lehetséges ilyet)

25. Feladat. (2 pt.) Igazolja, hogy az $n = 1, 2$ esetek kivételével $\varphi(n)$ sosem páratlan.

26. Feladat. (2 pt.) Oldja meg a $\varphi(2n) = n$ egyenletet a természetes számok halmazán.

27. Feladat. (2 pt.) Oldja meg a $\varphi(n) = n - 2$ egyenletet a természetes számok halmazán.

28. Feladat. (3 pt.) Legyen A az az $n \times n$-es mátrix, amelyben az i-edik sor j-edik eleme $\operatorname{lnko}(i, j)$. Határozza meg A determinánsát.