1. feladatsor – Számelmélet

1.1. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy alábbi oszthatóságok tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ esetén teljesülnek.
(1) $6 \mid n^3 - n$;
(2) $3 \mid 2 \cdot 7^n - 2$;
(3) $9 \mid 7^n + 3n - 1$;
(4) $1 + 2 + 3 \mid 1^{2n+1} + 2^{2n+1} + 3^{2n+1}$;

1.2. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $10^k - 1$ osztható 9-cel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 9-cel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek összege osztható 9-cel, azaz

$$9 \mid \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \iff 9 \mid a_0 + a_1 + \cdots + a_n.$$

1.3. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy $10^{2k+1} + 1$ és $10^{2k} - 1$ osztható 11-gyel minden k nemnegatív egész számra, majd ennek segítségével igazoljuk, hogy egy szám pontosan akkor osztható 11-gyel, ha (tízes számrendszerbeli) számjegyeinek váltakozó előjelű összege osztható 11-gyel, azaz

$$11 \mid \overline{a_n \cdots a_1 a_0} \iff 11 \mid a_0 - a_1 + \cdots + (-1)^n a_n.$$

1.4. Feladat. Palindrom számnak az olyan számokat nevezzük, amelyeknek tízes számrendszerbeli felírása oda-vissza ugyanaz. Mutassuk meg, hogy minden páros hosszúságú palindrom szám osztható tizeneggyel.

1.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy bármely a, b egész számokra teljesül, hogy $7 \mid 10a + b \Leftrightarrow 7 \mid a - 2b$. Döntsük el ennek a szabálynak a segítségével, hogy osztható -e héttel a 334989655 szám!

1.6. Feladat. Mutassuk meg, hogy ha a és b egész számok és $2a+9b$ osztható 17-tel, akkor $33a + 89b$ is osztható 17-tel.

1.7. Feladat. Adjuk meg azt a 3 legkisebb egymás után következő természetes számot, amelynek összege négyzetszám és egyben köbszám.

1.8. Feladat. Teljesül-e, hogy tetszőlegesen megadott nyolc darab háromjegyű szám közül mindig kiválasztható kettő úgy, hogy ezeket egymás mellé írva, a kapott szám 7-tel osztható?

1.9. Feladat. Igaz-e, hogy minden páratlan szám négyzete 8-cal osztva 1-et ad maradékul?

1.10. Feladat. Van-e olyan négyzetszám, amely
(a) 7-tel osztva 3-at ad maradékul;
(b) 8-cal osztva 3-at ad maradékul;
(c) 6-tal osztva 3-at ad maradékul;
(d) 9-cel osztva 3-at ad maradékul?

1.11. Feladat. Mutassuk meg, hogy a következő számok összetett számok.
(a) $10^6 - 5^7$;
(b) $10^{100} - 7$;
(c) $4^{20} - 1$;

(d) 1000027;
(e) $1000\ldots001$ (2012 darab 0);
(f) $1! + 2! + 3! + \ldots + 100!$.

1.12. Feladat. Határozzuk meg euklideszi algoritmussal az alábbi a, b egész számok legnagyobb közös osztóját, és adjuk meg a legkisebb közös többszörösüket.

(1) $a = -1183$, $b = 1573$.
(2) $a = 368$, $b = 161$;
(3) $a = 539$, $b = 1001$.
(4) $a = 377$, $b = 233$;
(5) $a = -1253$, $b = -3241$.

1.13. Feladat. Fejezzük ki az 1.12 Feladatban kapott legnagyobb közös osztókat a és b lineáris kombinációjaként.

1.14. Feladat. Melyik az a két természetes szám, amelyek legnagyobb közös osztója 6, a legnagyobb közös osztó keresésekor az euklideszi algoritmusban 3 maradékos osztást végeztünk, ahol a hányadosok egymás utáni természetes számok voltak (növekvő sorrendben), és a hányadosok összege 9.

1.15. Feladat. Adjunk meg végtelen sok $a, b \in \mathbb{N}$ számpárt úgy, hogy a rajtuk végrehajtott euklideszi algoritmus 3 lépésből álljon (azaz a 2. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot), és $\text{l.n.k.o}(a, b) = 1$ teljesüljön.

1.16. Feladat. Keressük meg azokat a legkisebb a és b ($a > b$) természetes számokat, melyekhez tartozó euklideszi algoritmus 6 lépésből áll (azaz az 5. osztásnál kapjuk az utolsó nemnulla maradékot). Általánosítsuk n lépésre.

1.17. Feladat. Oldjuk meg az alábbi diofantoszi egyenleteket.

(a) $72x + 60y = 24$; (b) $78x + 30y = 12$; (c) $63x - 28y = 22$
(d) $72x + 60y = 33$; (e) $21x - 15y = 12$; (f) $18x + 21y = 9$.

1.18. Feladat. Határozzuk meg a következő halmazok elemszámát.

(a) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(11x - 8y = 3)$ és $10 \leq x \leq 30\}$;
(b) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(7x - 19y = 10)$ és $15 \leq y \leq 35)\}$;
(c) $\{x \in \mathbb{Z} : (\exists y \in \mathbb{Z})(7x - 3y = 13)$ és $10 \leq x \leq 30\}$;
(d) $\{y \in \mathbb{Z} : (\exists x \in \mathbb{Z})(13x - 20y = 7)$ és $20 \leq y \leq 40)\}$.

1.19. Feladat. Egy út egyik oldalán 12 méterenként fák sorakoznak, a másik oldalon pedig villanyoszlopok, 75 méterenként. Ahol most állok, ott éppen szemben van egymással egy fa és egy villanyoszlop. Mennyit kell sétálnom a következő ilyen helyig?

1.20. Feladat. Január hatodikán négy hajó futott be Boston kikötőjébe. Az egyik hajó négyhetente tér vissza Bostonba, a másik minden nyolcadik héten, a harmadik és a negyedik pedig 12 illetve 16 hetente. Találkoznak -e még idén ebben a kikötőben?

1.21. Feladat. Egy n oldalszámú szabályos sokszög egyik csúcsában állok. A sokszög oldalainak hossza 1 mérföld, rajtam pedig hétmérföldes csizma van, így egy lépéssel a hetedik csúcsba jutok. Elindulok az egyik irányba, és addig meg se állok amíg vissza nem jutottam oda, ahonnan elindultam. Hány lépést fogok tenni? A csúcsok hányadrészét járom be?

1.22. Feladat. Kukutyinban 20 és 45 petákos érmék vannak forgalomban. Hogyan lehet ezekre felváltani 245 petákot? (Az összes megoldást adjuk meg.)

1.23. Feladat. Háromféle bélyeget vásároltunk. Az első alkalommal az egyes fajtákból rendre 3, 5 és 7 darabot, a második alkalommal 11, 13 és 9 darabot. A számla első alkalommal 110 Ft, a második alkalommal 250 Ft volt. Milyen címletű bélyegeket vásároltunk?

1.24. Feladat. Valaki a következőket mondta: „A barátnőm 22. születésnapjára 22 szál virágból álló csokrot vettem 2000 forintért. A csokor fréziából, nárciszból és rózsából állt, amelyekből egy szál 50 forintba, 70 forintba, illetve 130 forintba került" Hány szál virágot tartalmazott az egyes fajtákból a csokor, ha azt is tudjuk, hogy mindegyikből legalább két szál volt, és semelyik kettőből sem volt ugyanannyi?

1.25. Feladat. Egy 5 m hosszú kerítés szegélyének elkészítéséhez 15 cm, 20 cm és 93 cm hosszúságú lécek állnak rendelkezésünkre. Az egyes lécfajták felszegeléséhez rendre 2, 3 és 9 szög kell. Mennyire van szükségünk a lécekből, ha 50 szegünk van, és ezeket mind fel is akarjuk használni?

1.26. Feladat. Az 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 számjegyekből állítsunk össze öt különböző prímszámot, hogy minden számjegyet pontosan egyszer használjunk fel.

1.27. Feladat. Az a egész szám értékét adjuk meg úgy, hogy a, $a+4$ és $a+14$ számok prímek legyenek.

1.28. Feladat. Adjuk meg az összes olyan a egész számot, amelyre a, $a+10$ és $a+14$ is prímszám.

1.29. Feladat. Adjuk meg az összes olyan p prímszámot, amelyre $8p^2+1$ is prím.

1.30. Feladat. Teljesül-e, hogy bármely 3-nál nagyobb prímszám négyzete 24-gyel osztva 1-et ad maradékul?

1.31. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha 2^n-1 prímszám valamely $n \in \mathbb{N}$-re, akkor n is prímszám.

1.32. Feladat. Teljesül-e, hogy az 5-nél nagyobb ikerprímszámok összege osztható 12-vel?

1.33. Feladat. Határozzuk meg azokat a p prímszámokat, melyekre $2p-1$ és $2p+1$ ikerprímszám.

1.34. Feladat. Igaz-e, hogy bármely természetes szám egy számjegyének megváltoztatásával prímszámmá alakítható?

1.35. Feladat. Melyik az a legkisebb pozitív egész, amelynek pontosan 12 darab pozitív osztója van?

1.36. Feladat. Adjuk meg az összes olyan a és b természetes számot, amelyre

(1) $\mathrm{lnko}(a,b)=22$ és $\mathrm{lkkt}(a,b)=264$;
(2) $a+b=98$ és $\mathrm{lkkt}(a,b)=720$.

1.37. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $6x \equiv 4 \pmod 8$; (b) $13x \equiv -3 \pmod{34}$; (c) $88x \equiv 42 \pmod{55}$;
(d) $38x \equiv 24 \pmod{53}$; (e) $9x \equiv 15 \pmod{12}$; (f) $29x \equiv 17 \pmod{73}$.

1.38. Feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

1.39. Feladat. Határozza meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

1.40. Feladat. Oldjuk meg a kongruenciarendszereket.

(a) $$\begin{aligned} x &\equiv 7 \pmod 8, \\ x &\equiv 6 \pmod 7; \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5, \\ x &\equiv 1 \pmod 6, \\ x &\equiv 7 \pmod 9; \end{aligned}$$

(c) $$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 2, \\ x &\equiv 6 \pmod 5; \end{aligned}$$

(d) $$\begin{aligned} 10x &\equiv 16 \pmod 9, \\ 6x &\equiv 3 \pmod{21}, \\ 3x &\equiv 2 \pmod 5; \end{aligned}$$

(e) $$\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 5, \\ x &\equiv 4 \pmod 7; \end{aligned}$$

(f) $$\begin{aligned} 2x &\equiv 18 \pmod{10}, \\ 10x &\equiv 40 \pmod{12}, \\ 15x &\equiv 9 \pmod{21}; \end{aligned}$$

(g) $$\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod 6, \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10}; \end{aligned}$$

(h) $$\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod 5, \\ 5x &\equiv -1 \pmod 6, \\ 4x &\equiv 11 \pmod 9. \end{aligned}$$

1.41. Feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Ha a szurkolók 4 busszal érkeznek, és 5 fős csoportokban engedik be őket, akkor az utolsó csoportban csak 3 szurkoló marad. Ha 13 busszal érkeznek, és 8-as csoportokban nyernek bebocsátást, akkor szintén 3 szurkoló lesz az utoljára beengedett csoportban. Míg ha 16 busszal érkeznek szurkolók, és egyszerre 9-et léptetnek be, akkor végül 5 szurkoló marad. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

1.42. Feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

1.43. Feladat. Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

1.44. Feladat. Oldjuk meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

1.45. Feladat. Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?