

4. feladatsor – Relációk

Ismét n jelöli az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt.

4.1. Feladat. Döntsük el az alábbi relációkról, hogy reflexívek, szimmetrikusak, antiszimmetrikusak, tranzitívak, illetve dichotómok-e.

- (1) $\{(a, b) : |a| = |b|\}$ az \mathbb{R} halmazon,
- (2) $\{(a, b) : a/b \leq b/a\}$ az $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ halmazon,
- (3) $\{(a, b) : a^2 + b^2 = 1\}$ az \mathbb{R} , illetve $[0, 1]$ halmazokon,
- (4) $\{((a, b), (c, d)) : a + d = b + c\}$ az $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ halmazon,
- (5) $\{(1, 5), (2, 5), (3, 1), (3, 5), (3, 2), (4, 2), (4, 6)\}$ az \mathbb{N} halmazon,
- (6) $\{(e, f) : e \text{ és } f\text{-nek van közös pontja}\}$ a sík egyeneseseinek halmazán,
- (7) $\{(1, 2), (1, 5), (1, 6), (2, 5), (3, 2), (3, 5), (4, 5), (6, 5)\}$ az \mathbb{N} halmazon,
- (8) $\{(a, b) : |a - b| > 1\}$ a \mathbb{Z} halmazon.

4.2. Feladat. Határozza meg az $A = \{a, b, c, d\}$ alaphalmazon értelmezett $\rho = \{(a, a), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c), (d, d)\}$ ekvivalenciarelációhoz tartozó A/ρ osztályozást. Igazak-e a következő állítások:

- (1) $(a, a) \in A/\rho$,
- (2) $\{b\} \in A/\rho$,
- (3) $\{b, c\} \in A/\rho$,
- (4) $\{d\} \in A/\rho$,
- (5) $|A/\rho| = 4$.

4.3. Feladat. Határozzuk meg a következő ekvivalenciarelációkhoz tartozó osztályozást.

- (1) $A = \underline{4}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (2, 1)\}$;
- (2) $A = \underline{4}$, $\rho = \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 3), (3, 1), (3, 2)\}$;
- (3) $\{(a, b) : ab > 0\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 1, 2, 3\}$ halmazon;
- (4) $\{(a, b) : 3 \mid b - a\}$ az $A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ halmazon;
- (5) $\{(H, G) : |H| = |G|\}$ az $A = \{\emptyset, \{1, 2\}, \{\emptyset\}, \{0\}, \{a, b\}, \{1, 2, 3\}\}$ halmazon;
- (6) $\{(x, y) : x\text{-nek és } y\text{-nak van közös prímosztója}\}$ az $A = \{2, 3, 8, 9, 14, 15, 19, 26\}$ halmazon;
- (7) $\{(x, y) : x \text{ és } y \text{ számjegyeinek összege egyenlő}\}$ az $A = \{71, 301, 216, 4, 121, 54, 602, 315\}$ halmazon;
- (8) $\{(x, y) : x^2 + y^2 \text{ páros}\}$ a \mathbb{Z} halmazon.
- (9) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : xy > 0 \text{ vagy } x = y = 0\}$
- (10) $A = \mathbb{Z}$, $\rho = \{(x, y) : (\exists a \in \mathbb{Z}) : 3a \leq x, y < 3a + 3\}$

4.4. Feladat. Adjunk meg olyan osztályozást a $\underline{8}$ halmazon, melynek 3 osztálya van, és melyhez tartozó ρ ekvivalenciára (külön-külön) teljesülnek a következő feltételek:

- (1) $(1, 3), (2, 6) \in \rho$,
- (2) $(1, 2) \in \rho, (1, 3), (2, 4), (3, 5) \notin \rho$,
- (3) $(1, 2), (3, 4) \in \rho$,
- (4) $(1, 3) \in \rho, (3, 5), (2, 7), (3, 4) \notin \rho$.

4.5. Feladat. Adjuk meg a következő φ leképezések magjához tartozó osztályozást.

- (1) $\varphi : \underline{6} \rightarrow \mathbb{N}_0, n \mapsto \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$,
- (2) $\varphi : P(\{1, 2, 3, 4, 5\}) \rightarrow \mathbb{N}_0, A \mapsto |A|$,
- (3) $\varphi : \underline{4} \times \underline{4} \rightarrow \mathbb{N}, (x, y) \mapsto x$,

$$(4) \varphi = (1\ 3\ 5)(2\ 4) \in S_5.$$

$$(5) \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} n - 9, & \text{ha } n \geq 10 \\ n, & \text{különben} \end{cases}$$

$$(6) \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto 2n + 1$$

$$(7) \varphi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \bar{n}^{(3)} + 1 \quad (\bar{n}^{(3)} \text{ az } n \text{ szám hármas maradéka})$$

$$(8) \varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, z \mapsto |z|$$

4.6. Feladat. Legyen ρ az $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, \}$ alaphalmaz $C = \{\{1\}, \{2, 4, 5, 6\}, \{3\}\}$ osztályozásához tartozó ekvivalenciareláció, határozza meg a ρ relációt. Igazak-e a következő állítások:

- (1) $(2, 2) \in \rho$,
- (2) $(1, 2) \in \rho$,
- (3) $(2, 4) \in \rho$,
- (4) $\{3\} \in \rho$,
- (5) $|\rho| = 18$.

4.7. Feladat. Hány eleme van azon $\rho \subseteq \underline{7} \times \underline{7}$ ekvivalenciarelációnak, melynek

- (1) 3 osztálya van, melyek 1, 2, 4 eleműek,
- (2) 3 osztálya van, melyek 2, 2, 3 eleműek.
- (3) 2 osztálya van, melyek 3, 4 eleműek,
- (4) 4 osztálya van, melyek 1, 2, 2, 2 eleműek.

4.8. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

- (1) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$;
- (2) $(B; \subseteq)$, ahol $B = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 4\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$;
- (3) $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$;
- (4) $(D_{30}; |)$, ahol D_n jelöli az n pozitív osztóinak halmazát,
- (5) $(D_{30}; \leq)$,
- (6) $(D_{48} \cap D_{120}; |)$
- (7) $(D; \sqsubseteq)$, ahol $D = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$, és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor teljesül, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye.

4.9. Feladat. Adjunk meg olyan Hasse-diagramot, amelyben

- (1) bármely két elem összehasonlítható, és összesen 5 eleme van,
- (2) bármely két elem összehasonlítható, és nincs benne legkisebb elem,
- (3) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 5 eleme van,
- (4) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 3 eleme van,
- (5) 3 minimális elem van, nincs legnagyobb elem, és összesen 4 eleme van,
- (6) egyetlen minimális elem van, de nincs legkisebb elem.