2. feladatsor – Logika

2.1. Feladat. Formalizáljuk az alábbi ítéleteket, és határozzuk meg a logikai értéküket, ha a bennük szereplő összes változó logikai értéke hamis.

(1) Ha egy szelet kenyér egyik fele lekváros, és leejtjük, akkor a föld, vagy az asztal lekváros lesz.
(2) Pontosan akkor ejtünk le egy szelet kenyeret, ha vagy az egyik fele lekváros, vagy egyik fele sem lekváros, de ügyetlenek vagyunk.
(3) Ha esik az eső és nincs nálam esernyő, akkor vagy otthon maradok, vagy megázok.
(4) Csak akkor megyek boltba, ha nem esik az eső, vagy ha esik, de van nálam esernyő.
(5) Ha nem sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor nem mehetek vizsgázni, és még szomorú is leszek.
(6) Ha sikerül a diszkrét matematika gyakorlatom, akkor pontosan akkor leszek szomorú, ha nem sikerül a vizsgám.
(7) Ha valami kutya, akkor állat, de ha valami állat, akkor az vagy kutya, vagy nem kutya.
(8) Egy állat pontosan akkor kutya, ha van négy lába, két füle és tud ugatni vagy néma.
(9) Ha fáradt vagyok és nem tudok aludni, akkor inkább olvasok.
(10) Pontosan akkor hagyom abba az olvasást, ha időközben elalszok, vagy megunom a könyvet és nem találok jobbat.
(11) Ha valami elromolhat, akkor az el is romlik, vagy már elromlott, vagy én tévedek.
(12) Pontosan akkor tévedek, ha valami elromolhat, de még nem romlott el, és nem is fog elromlani.
(13) Gyakorlatra járni rosszabb, mint fagyizni, de ha nem járunk gyakorlatra, akor megbukunk.
(14) Ha megbukunk, akkor nem kapunk diplomát, és ha nincs már most sok pénzünk, akkor nem fogunk tudni miből fagyit venni.

2.2. Feladat. Adjuk meg az alábbi formulák összes részformuláját és az igazságtáblázatát:

(1) $(A \vee C) \to ((\neg B) \wedge (C \leftrightarrow A))$;
(2) $(A \to (B \vee (\neg C))) \leftrightarrow ((\neg A) \wedge B)$;
(3) $(B \wedge (\neg A)) \to (C \leftrightarrow (A \vee (\neg B)))$;
(4) $(A \vee C) \to ((\neg B) \wedge (C \leftrightarrow A))$;
(5) $(A \vee (B \leftrightarrow (\neg C))) \to (A \wedge (\neg C))$;
(6) $(C \wedge (A \to (\neg B))) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$;

2.3. Feladat. Az alábbi formulák közül melyek tautológiák?

(1) $(A \to B) \leftrightarrow ((\neg A) \vee B)$;
(2) $(((\neg A) \to (A \wedge B)) \wedge C) \leftrightarrow ((A \leftrightarrow C) \wedge A)$;
(3) $A \to (A \wedge B)$;
(4) $(A \vee B) \to ((A \vee (\neg B)) \to A)$;
(5) $(A \vee B) \vee ((\neg A) \vee (\neg B))$;
(6) $A \leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge \neg B))$;

(7) $(A \wedge (\neg A)) \leftrightarrow ((\neg(A \to (\neg A))) \wedge (B \to \neg C))$.

2.4. Feladat. Ekvivalensek-e az alábbi formulák?

(1) $(A \wedge B) \to C$ és $A \to (B \to C)$;
(2) $(A \to B) \to ((A \vee B) \to (B \vee C)$ és $(A \wedge B) \to A$;
(3) $(A \to B) \leftrightarrow (\neg A)$ és $A \wedge (\neg B)$;
(4) $(A \to C) \to ((A \wedge B) \to (B \wedge C))$ és $A \to (A \vee C)$;
(5) A és $(A \wedge B) \vee (A \wedge (\neg B))$;
(6) $(A \leftrightarrow ((\neg B) \vee C)) \wedge (B \to ((\neg A) \wedge C))$ és $((\neg B) \vee A) \wedge ((\neg B) \vee C)$.

2.5. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\wedge$ és $\neg$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(1)

A	B	?
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	i

(2)

A	B	?
i	i	i
i	h	h
h	i	h
h	h	i

2.6. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\to$ és $\leftrightarrow$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(1)

A	B	?
i	i	i
i	h	i
h	i	i
h	h	h

(2)

A	B	?
i	i	h
i	h	i
h	i	i
h	h	h

2.7. Feladat. Adjunk meg olyan formulát, vagy bizonyítsuk be, hogy nincs ilyen, amely csak az $\vee$ és $\wedge$ műveleteket tartalmazza, és melynek igazságtáblája a következő:

(1)

A	B	?
i	i	h
i	h	h
h	i	h
h	h	h

(2)

A	B	?
i	i	i
i	h	i
h	h	i
h	i	i

2.8. Feladat. Adjuk meg a következő formulák teljes diszjunktív normálformáját.

(1) $A \to (\neg A \vee B)$;
(2) $(A \wedge \neg B) \leftrightarrow (\neg A \vee C)$;
(3) $A \vee (\neg A \to B)$;
(4) $(A \wedge \neg C) \leftrightarrow (\neg B \vee C)$.

2.9. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Sári és Béla azonos korú, vagy Sári idősebb Bélánál. Ha Sári és Béla azonos korú, akkor Nelli és Béla nem azonos korú. Ha Sári idősebb Bélánál, akkor Béla idősebb Tibornál.
(2) Tehát Nelli és Béla nem azonos korú, vagy Béla idősebb Tibornál.

2.10. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.
(2) Tehát a 2 prímszám.

2.11. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Ha nem esik az eső, nem húzom fel az esernyőmet. Csak akkor húzom fel az esernyőmet, ha nálam van, és esik. Ha esik az eső, akkor van nálam esernyő.
(2) Tehát, ha esik az eső, akkor felhúzom az esernyőmet.

2.12. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) A $\sqrt{2}$ szám vagy racionális, vagy irracionális. Ha $\sqrt{2}$ racionális, akkor $(\sqrt{2})^2$ is racionális. Vagy $\sqrt{2}$, vagy $(\sqrt{2})^2$ nem racionális.
(2) Tehát $\sqrt{2}$ irracionális.

2.13. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az első csoportba eső állításokból következik-e a 2. állítás.

(1) Ha esik az eső és süt a nap, akkor szivárvány lesz. Ha nem süt a nap, akkor vagy esik az eső, vagy köd van. Csak akkor lehet szivárvány, ha süt a nap.
(2) Tehát, ha szivárvány van, akkor nincs köd.

2.14. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\forall x)P\big(f(x,a),x\big) \to (\exists y)\Big(P\big(f(y,x),y\big) \wedge Q(x)\Big).$$

2.15. Feladat. Legyen Q egyváltozós predikátum, P kétváltozós predikátum, f kétváltozós függvényjel és a individuumkonstans. Adjuk meg a következő formula részkifejezéseit és részformuláit. Melyek a szabad, illetve a kötött változók?

$$(\exists x)\Big(P\big(f(y,a),x\big) \wedge \neg Q(a)\Big) \leftrightarrow (\forall y)\Big(P\big(f(x,a),y\big)\Big).$$

2.16. Feladat. Legyen az individdumtartomány az egész számok hamaza, és vezessük be az alábbi függvényjeleket illetve predikátumot:

$$f(x,y) = x + y; \quad g(x,y) = xy; \quad P(x) : x \text{ páros}.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\forall y)(\forall z)\,(f(x,g(y,z)) = f(g(x,y),g(x,z)))$,
(2) $(\forall x)(\exists y)(\forall z)\,(f(x,y) = z)$,
(3) $(\forall x)\big(\neg P(x) \to (\forall y)\,(P(y) \vee P(f(x,y)))\big)$.

2.17. Feladat. Legyen az individdumtartomány az egész számok hamaza, és vezessük be az alábbi függvényjelet, predikátumokat, illetve konstanst:

$$f(x,y) = xy;\quad O(x,y) : x \text{ osztja } y\text{-}t;\quad E(x,y) : x = y;\quad c = 17.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(O(x,y) \to E(y,f(x,z))\big)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big((O(x,y) \wedge O(y,x)) \to E(x,y)\big)$,
(3) $(\forall x)(\exists y)E(f(x,y),c)$.

2.18. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmaz és legyen f függvényjel A-n, melyre

$$f(1) = 3,\ f(2) = 2,\ f(3) = 1,\ f(4) = 2,\ f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$Q(x) : x \text{ páros};\quad E(x,y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(x),y)\big)$,
(2) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(y),x)\big)$,
(3) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(x),y)\big)$,
(4) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(y),x)\big)$,
(5) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$.

2.19. Feladat. Legyen az individuumtartomány a **pozitív** egész számok halmaza és definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b) : a \mid b,\quad E(a,b) : a = b.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)P(x,x)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to P(y,x)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((P(x,y) \wedge P(y,x)) \to E(x,y)$,
(4) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \vee P(y,x))$.

2.20. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket, és adjuk meg a formulák tagadását. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$H(x)$: „*x hallgató*”,	$V(x)$: „*x felkészült a vizsgára*”,
$C(x,y)$: „*x csoporttársa y-nak*”,	p: „*Péter*”.

(1) Néhány hallgató nem készült fel a vizsgára.
(2) Péter hallgató.
(3) Hallgatók csoporttársai is hallgatók.
(4) Péter összes csoporttársa felkészült a vizsgára.
(5) A vizsgára pontosan Péter csoporttársai készültek fel.
(6) Van olyan hallgató, akinek semelyik csoporttársa sem készült fel a vizsgára.

2.21. Feladat. Formalizáljuk predikátumkalkulusban az alábbi ítéleteket, és adjuk meg a formulák tagadását. Individuumtartomány az emberek halmaza, a predikátumok, függvényjelek és individuumkonstansok a következők:

$S(x)$: x szomorú	e : én
$E(x,y)$: x az y ellensége	$B(x,y)$: x az y barátja.

(1) Van, aki szomorú.
(2) Szomorú vagyok.
(3) Mindenkinek vannak ellenségei.
(4) Akinek nincs barátja, az szomorú.
(5) Az ellenségem ellensége a barátom.
(6) Van olyan ember, akinek minden barátja az ellenségem.