

# MBLK12: Logikai (levelező)

(előadásvázlat)

Maróti Miklós

## 1. ÍTÉLETKALKULUS

**1. Definíció.** **Ítéletnek** nevezünk egy olyan állítást (kijelentő mondatot), amely vagy igaz vagy hamis, de a kettő egyidejűleg nem teljesülhet. Ha az ítélet igaz (vagy hamis), akkor azt mondjuk hogy az ítélet **logikai értéke** vagy **igazságértéke** igaz (vagy hamis). Az ítéleteket nagybetűkkel jelöljük.

**2. Példa.** Az alábbi mondatok közül  $A$  és  $B$  ítélet, de  $C$  és  $D$  nem az.

$A$ : A Föld a Nap körül kering.

$B$ : Minden 2-nél nagyobb páros szám előáll két prímszám összegeként.

(Ez az úgynevezett Goldbach-sejtés, amiről nem tudjuk hogy igaz-e.)

$C$ : Miért kering a Föld a Nap körül?

$D$ : Most nem mondok igazat.

(Ez az állítás se igaz, se hamis nem lehet, mert ellentmondana önmagának.)

**3. Példa.** A köznapi nyelvben és a matematikában is kötőszavak segítségével képezhetünk ítéletekből újabb ítéleteket:

$F$ : Ha süt a nap, akkor kimegyek az uszodába.

$G$ : Kimegyek az uszodába, és süt a nap.

$H$ : Nem süt a nap.

$I$ : Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

$J$ : Kimegyek az uszodába, vagy süt a nap.

$K$ : Akkor és csak akkor süt a nap, ha kimegyek az uszodába.

**4. Definíció.** Tetszőleges  $A, B$  ítéletre definiáljuk az alábbi **összetett ítéleteket**:

(1)  $A$  **negációja** a „nem  $A$ ” ítélet, melynek jele  $\neg A$ ;

(2)  $A, B$  **konjunkciója** az „ $A$  és  $B$ ” ítélet, melynek jele  $A \wedge B$ ;

(3)  $A, B$  **diszjunkciója** az „ $A$  vagy  $B$ ” ítélet, melynek jele  $A \vee B$ ;

(4)  $A, B$  **implikációja** a „ha  $A$ , akkor  $B$ ” ítélet, melynek jele  $A \rightarrow B$ ;

(5)  $A, B$  **ekvivalenciája** az „akkor és csak akkor  $A$ , ha  $B$ ” ítélet, melynek jele  $A \leftrightarrow B$ .

Ha egy ítélet nem bontható fel összetett ítéletre, akkor **primitív ítéletnek** nevezzük.

**5. Definíció.** Az előző definícióban bevezetett öt **logikai művelet** művelet táblázata a következők, amely segítségével összetett ítéletek logikai értéke kistámítható:

$A$	$\neg A$	$A$	$B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \rightarrow B$	$A \leftrightarrow B$
<b>h</b>	<b>i</b>	<b>h</b>	<b>h</b>	<b>h</b>	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>i</b>
<b>h</b>	<b>i</b>	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>i</b>	<b>h</b>
<b>i</b>	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>h</b>	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>h</b>	<b>h</b>
		<b>i</b>	<b>i</b>	<b>i</b>	<b>i</b>	<b>i</b>	<b>i</b>

**6. Példa.** A mindennapi életben a „vagy” kötőszót kétféle értelemben is szokás használni.

$L$ : Kávét hoz, vagy álmos. (**megengedő vagy**: akár mind a kettő megtörténhet.)

$M$ : Gyalog megy, vagy biciklizik. (**kizáró vagy**: csak az egyik történhet meg.)

Az „ $A$  kizáró vagy  $B$ ” ítélet alatt igazából az  $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$  ítéletet értjük, és nem vezetük be új logikai műveletet.

**7. Példa.** A „csak akkor  $A$ , ha  $B$ ”, „ $B$  szükséges feltétele  $A$ -nak”, „ $A$  elegendő feltétele  $B$ -nek” és „ha  $A$ , akkor  $B$ ” ítéletek mind ugyan azt jelentik, ahogy ezt a következő ítéletek mutatják:

$N$ : Csak akkor megyek az uszodába, ha süt a nap.

$O$ : A napsütés szükséges feltétele az uszodába menésnek.

$P$ : Az uszodába menés elegendő feltétele a napsütésnek.

Q: Ha megyek az uszodába, akkor süt a nap.

**8. Definíció.** **Ítéletváltozónak** nevezzük az olyan változókat, amelyek ítéleteket jelölnek. Az ítéletkalkulus **formulái** a következők:

- (1) az ítéletváltozók mindegyike formula;
- (2) ha  $F, G$  formula, akkor  $(\neg F), (F \wedge G), (F \vee G), (F \rightarrow G), (F \leftrightarrow G)$  mindegyike formula; és
- (3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

**9. Definíció.** Legyenek  $F$  és  $G$  formulák. Azt mondjuk, hogy a  $G$  **részformulája**  $F$ -nek, ha fellép az előző definícióban leírt előállítás során.

**10. Példa.** Minden ítélet formalizálható egy ítéletkalkulusbeli formulával, amelyben a ítéletváltozók a primitéleteket jelöli. Például a következő ítéletek

$R$ : Csak akkor megyek ki az uszodába, ha süt a nap.

$S$ : Ha nem süt a nap, nem megyek ki az uszodába.

$T$ : Nem fordulhat elő, hogy kimegyek az uszodába és nem süt a nap.

egy lehetséges formalizálása a következő:  $R = A \rightarrow B, S = (\neg B) \rightarrow (\neg A), T = \neg((A \wedge (\neg B)))$ , ahol az  $A$  és  $B$  ítéletváltozók a „Kimegyek az uszodába” és „Süt a nap” primitéleteket jelöli.

**11. Definíció.** Ha adott az ítéletváltozók igazságértéke, akkor a **formula igazságértéke** a formula felépítése alapján a logikai műveletek segítségével mindig kiszámítható. Ha az ítéletváltozók minden lehetséges értékére a formula igazságértékét kiszámoljuk, akkor megkapjuk a formula **igazságtáblázatát**.

**12. Példa.** A 10. példa  $T$  formulájának igazságtáblázata (utolsó oszlop) a felépítése alapján kiszámolva:

$A$	$B$	$\neg B$	$A \wedge (\neg B)$	$\neg(A \wedge (\neg B))$
h	h	i	h	i
h	i	h	h	i
i	h	i	i	h
i	i	h	h	i

**13. Definíció.** Az  $F$  és  $G$  formulák **logikailag ekvivalensek**, ha a bennük szereplő ítéletváltozók tetszőleges igazságértékére a formulák igazságértéke megegyezik (azaz a formulák igazságtáblázata megegyezik). Ekkor ezt úgy jelöljük, hogy  $F \equiv G$ . Egy  $F$  formulát **tautológiának** hívunk, ha igazságértéke mindig igaz, azaz  $F \equiv i$ .

**14. Tétel.** Igazak a következő logikai ekvivalenciák.

$\wedge, \vee$  alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{lll}
 A \wedge A \equiv A, & A \vee A \equiv A, & \text{(idempotencia)} \\
 A \wedge B \equiv B \wedge A, & A \vee B \equiv B \vee A, & \text{(kommutativitás)} \\
 (A \wedge B) \wedge C \equiv A \wedge (B \wedge C), & (A \vee B) \vee C \equiv A \vee (B \vee C), & \text{(asszociativitás)} \\
 A \wedge (A \vee B) \equiv A, & A \vee (A \wedge B) \equiv A, & \text{(abszorptivitás)} \\
 A \wedge (B \vee C) \equiv (A \wedge B) \vee (A \wedge C), & A \vee (B \wedge C) \equiv (A \vee B) \wedge (A \vee C), & \text{(disztributivitás)}
 \end{array}$$

$\neg$  alaptulajdonsága:

$$\begin{array}{ll}
 \neg(\neg A) \equiv A, & \text{(dupla tagadás)} \\
 \neg(A \wedge B) \equiv (\neg A) \vee (\neg B), & \neg(A \vee B) \equiv (\neg A) \wedge (\neg B) \quad \text{(De Morgan szabályok)}
 \end{array}$$

**i** és **h** alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{ll}
 A \wedge (\neg A) \equiv \mathbf{h}, & A \vee (\neg A) \equiv \mathbf{i}, \\
 A \wedge \mathbf{i} \equiv A, & A \vee \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, \\
 A \wedge \mathbf{h} \equiv \mathbf{h}, & A \vee \mathbf{h} \equiv A, \\
 \mathbf{i} \rightarrow A \equiv A, & \mathbf{h} \rightarrow A \equiv \mathbf{i}, \\
 A \rightarrow \mathbf{i} \equiv \mathbf{i}, & A \rightarrow \mathbf{h} \equiv \neg A,
 \end{array}$$

$\rightarrow$  és  $\leftrightarrow$  alaptulajdonságai:

$$\begin{array}{ll}
 A \rightarrow B \equiv (\neg A) \vee B, & A \leftrightarrow B \equiv (A \rightarrow B) \wedge (B \rightarrow A), \\
 A \rightarrow B \equiv (\neg B) \rightarrow (\neg A), & A \leftrightarrow B \equiv B \leftrightarrow A, \\
 A \rightarrow (B \rightarrow C) \equiv (A \wedge B) \rightarrow C, & (A \leftrightarrow B) \leftrightarrow C \equiv A \leftrightarrow (B \leftrightarrow C), \\
 A \rightarrow (B \wedge C) \equiv (A \rightarrow B) \wedge (A \rightarrow C), & (A \vee B) \rightarrow C \equiv (A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C).
 \end{array}$$

**15. Tétel.** Ha egy formula valamely részformulája helyébe vele logikailag ekvivalens formulát írunk, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

**16. Tétel.** Ha két formula logikailag ekvivalens, akkor a bennük szereplő ítéletváltozókat tetszőleges formulákkal helyettesítve újra logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

**17. Következmény.** Minden formula logikailag ekvivalens egy olyan formulával, amelyben csak negáció, konjunkció (és diszjunkció) szerepel.

**18. Tétel.** Legyen  $F$  olyan formula, amelyben csak a negáció, konjunkció és diszjunkció szerepel. Legyen  $F^*$  az a formula, amelyet az  $F$ -ből úgy kapunk, hogy

- (1) minden  $\vee$  jelet  $\wedge$ -re cserélünk,
- (2) minden  $\wedge$  jelet  $\vee$ -re cserélünk,
- (3) minden  $A$  negálatlan ítéletváltozót  $\neg A$ -ra cserélünk, és
- (4) minden  $\neg A$  negált ítéletváltozót  $A$ -ra cserélünk.

Ekkor  $\neg F \equiv F^*$ .

**19. Példa.** Legyen  $F = A \wedge (B \vee \neg C)$ . Ekkor  $\neg F \equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$ . Figyelem, fontos, hogy csak ítéletváltozók lehetnek negálva az  $F$  formulában. Például ha  $F = A \wedge \neg(B \vee \neg C)$ , akkor  $\neg F \not\equiv \neg A \vee (\neg B \wedge C)$ , hanem  $\neg F \equiv \neg A \vee (B \vee \neg C)$ .

**20. Definíció.** Az  $F$  formulát **diszjunktív normálformának** nevezünk, ha  $F = K_1 \vee \dots \vee K_t$  alakú, ahol  $K_1, \dots, K_t$  mindegyike változóknak vagy változók negáltjainak konjunkciója. Az  $A_1, \dots, A_n$  változókból felépített diszjunktív normálforma **teljes**, ha  $K_1, \dots, K_t$  páronként különböző  $n$ -tagú konjunkciók, amelyekben az  $A_1, \dots, A_n$  ítéletváltozók mindegyike szerepel negálva vagy negálatlanul.

**21. Tétel.** Minden formulához létezik vele logikailag ekvivalens teljes diszjunktív normálforma, amely a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott.

## 2. PREDIKÁTUMKALKULUS

**22. Definíció.** **Predikátumnak** nevezzük az olyan függvényt vagy kifejezést, amelybe alkalmas objektumokat behelyettesítve ítéletet kapunk. A predikátum változóit **individuumváltozóknak**, a behelyettesíthető objektumok nemüres összességét **individuumtartománynak** nevezzük. A predikátumokat az ítéletekhez hasonlóan nagy betűkkel jelöljük, de zárójelben feltüntetjük az individuumváltozóit. Az ítéleteket nullváltozós predikátumoknak tekintjük.

**23. Példa.** Az egész számok halmazán a következő kifejezések predikátumok:

- (1)  $O(x, y)$ : „ $x$  osztója  $y$ -nak”,
- (2)  $P(x)$ : „az  $x$  szám prím”,
- (3)  $F(x)$ : „az  $x$  szám felbonthatatlan”,
- (4)  $M(x, y, z)$ : „az  $x$  és  $y$  számok szorzata  $z$ ”.

**24. Definíció.** Tetszőleges  $A$  ítéletre és  $x$  individuumváltozóra definiáljuk az alábbi ítéleteket:

- (1) „minden  $x$ -re  $A$ ”, melynek neve **univerzális kvantifikáció** és jele  $(\forall x)A$ ;
- (2) „létezik  $x$ , hogy  $A$ ”, melynek neve **egzisztenciális kvantifikáció** és jele  $(\exists x)A$ .

**25. Példa.** Minden ítélet, amely egy adott individuumtartomány elemeiről állít valamit, formalizálható. Például az előző példa predikátumait felhasználva a következő ítéleteket formalizáljuk (individuumtartomány az egész számok halmaza):

- (1) „tetszőleges  $a, b, c$  egész számokra ha  $a \mid b$  és  $b \mid c$  akkor  $a \mid c$ ”  

$$(\forall a, b, c)((O(a, b) \wedge O(b, c)) \rightarrow O(a, c));$$
- (2) „az  $a$  szám akkor és csak akkor osztója  $b$ -nek, ha létezik olyan  $c$  egész szám, hogy  $ac = b$ ”  

$$O(a, b) \leftrightarrow (\exists c)(M(a, c, b));$$
- (3) „minden prímszám felbonthatatlan”  

$$(\forall a)(P(a) \rightarrow F(a)).$$

**26. Megjegyzés.** Figyeljük meg, hogy a  $\forall$  kvantor után általában implikációt, a  $\exists$  kvantor után pedig ést használunk, ahogy ezt a „minden politikus hazug”  $(\forall x)(P(x) \rightarrow H(x))$  és a „létezik olyan politikus, aki hazug”  $(\exists x)(P(x) \wedge H(x))$  ítéletek formalizálásai mutatják.

**27. Definíció.** Rögzítsük a függvényjelek  $\mathcal{F}$  és a predikátumjelek  $\mathcal{P}$  halmazát, illetve ezen jelek változóinak számát (aritását). A nullváltozós függvényjeleket **individuumkonstansoknak** nevezzük. Ekkor a predikátumkalkulus (első rendű nyelv) **kifejezései** a következők:

- (1) az individuumváltozók mindegyike kifejezés;
- (2) ha  $t_1, \dots, t_n$  kifejezések és  $f \in \mathcal{F}$   $n$ -változós függvényjel, akkor  $f(t_1, \dots, t_n)$  is kifejezés; és
- (3) minden kifejezés az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

A predikátumkalkulus (első rendű nyelv) **formulái** a következők:

- (1) ha  $t_1, \dots, t_n$  kifejezések és  $P \in \mathcal{P}$   $n$ -változós predikátumjel, akkor  $P(t_1, \dots, t_n)$  prímmformula;
- (2) ha  $F, G$  formulák és  $x$  individuumváltozó, akkor  $(\neg F)$ ,  $(F \wedge G)$ ,  $(F \vee G)$ ,  $(F \rightarrow G)$ ,  $(F \leftrightarrow G)$ ,  $((\forall x)F)$ ,  $((\exists x)F)$  mindegyike összetett formula; és
- (3) minden formula az előző két pont véges számú alkalmazásával megkapható.

**28. Példa.** Tartalmazza  $\mathcal{F} = \{\cdot\}$  a szokásos 2-változós szorzás függvényjelet és  $\mathcal{R} = \{=\}$  a szokásos 2-változós egyenlőség predikátumjelet. Ekkor az számelméletnél bevezetett oszthatóságra vonatkozó definíciókat és állításokat mind formalizálhatjuk. Például a „tetszőleges  $a, b, c$  egészekre ha  $a$  osztja  $b$ -t és  $b$  osztja  $c$ -t, akkor  $a$  osztja  $c$ -t” ítélet egy lehetséges formalizálása a következő:

$$(\forall a, b, c)((\exists x)(a \cdot x = b) \wedge (\exists x)(b \cdot x = c)) \rightarrow (\exists x)(a \cdot x = c).$$

**29. Definíció.** A formulák felépítése során fellépő  $(\forall x)F$  és  $(\exists x)F$  alakú részformuláknál  $F$ -et a **kvantor hatáskörének** hívjuk. Ekkor az  $x$  individuumváltozó  $F$ -beli előfordulásait **kötöttnek** nevezük, minden nem kötött előfordulást **szabadnak** nevezünk. Egy formula **szabad változói** alatt a szabadon előforduló változók halmazát értjük. Egy formula **zárt**, ha nincs szabad változója.

**30. Példa.** Az

$$(\forall x)((\exists y)(x \cdot y = z) \rightarrow (x = y))$$

formulában a  $z$  változó szabadon fordul elő, az  $y$  változó kétszer fordul elő, először kötötten majd szabadon, az  $x$  változó szintén kétszer fordul elő, mindekettször kötötten. Tehát a formula szabad változói  $y$  és  $z$ . A  $y$  változó kötött előfordulására úgy gondolunk, mint ha az teljesen különböző lenne a szabad előfordulástól, és a változó átnevezésével ez egyértelművé is tehető:

$$(\forall x)((\exists t)(x \cdot t = z) \rightarrow (x = y)).$$

**31. Definíció.** Rögzítsük a függvényjelek  $\mathcal{F}$  és a predikátumjelek  $\mathcal{P}$  halmazát, az  $U$  individuumtartományt, és rajta a **függvényjelek** és **predikátumjelek** egy **interpretációját**, azaz minden  $n$ -változós  $f \in \mathcal{F}$  függvényjelre egy  $f: U^n \rightarrow U$  függvényt, és minden  $n$ -változós  $P \in \mathcal{P}$  predikátumjelre egy  $P: U^n \rightarrow \{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}$  predikátumot. Ha  $t$  olyan kifejezés, melynek változói szerepelnek az  $x_1, \dots, x_n$  változók között, akkor az individuumtartományon értelemszerűen definiáljuk az  $n$ -változós  $t(x_1, \dots, x_n)$

függvényt a kifejezés felépítése szerint, melyet a  $t$  **kifejezés interpretációjának** nevezzük. Ha  $F$  olyan formula, melynek szabad változói szerepelnek az  $x_1, \dots, x_n$  változók között, akkor az individuumentartományon értelemszerűen definiáljuk az  $n$ -változós  $F(x_1, \dots, x_n)$  predikátomot a formula felépítése szerint, melyet az  $F$  **formula interpretációjának** nevezzük.

**32. Példa.** Tekintsük az  $F = ((\exists z)(x \cdot z = y)) \wedge ((\exists z)(y \cdot z = x))$  formulát. Ennek a formulának  $x$  és  $y$  a szabad változója, tehát minden individuumentartományon (amelyen van szorzás és egyenlőség értelmezve) meghatároz egy kétváltozós  $F(x, y)$  predikátomot. Az egész számok halmazán ez a predikátum ekvivalens az  $x = \pm y$  predikátummal. Fontos, hogy a formula interpretációja függ az individuumentartománytól és a függvényjelek és predikátumjelek rajta való interpretációjától. Ha például a  $\cdot$  függvényjel alatt az összeadást értenénk az egész számok halmazán, akkor  $F(x, y)$  az azonosan igaz predikátum lenne.

**33. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $F$  és  $G$  formulák **logikailag ekvivalensek**, és azt írjuk hogy  $F \equiv G$ , ha tetszőleges individuumentartományon tetszőlegesen kiválasztva a függvényjelek és predikátumjelek interpretációját a formulák által meghatározott  $F(x_1, \dots, x_n)$  és  $G(x_1, \dots, x_n)$  predikátumok megegyeznek. Egy  $F$  formulát **tautológiának** hívunk, ha tetszőleges interpretáció esetén igaz.

**34.\* Tétel.** Legyenek  $F, G$  tetszőleges formulák,  $H$  pedig olyan formula, melynek  $x$  nem szabad változója. Ekkor teljesülnek az alábbi logikai ekvivalenciák

$$\begin{aligned} (\forall x)(\forall y)F &\equiv (\forall y)(\forall x)F, & (\exists x)(\exists y)F &\equiv (\exists y)(\exists x)F, \\ \neg(\forall x)F &\equiv (\exists x)(\neg F), & \neg(\exists x)F &\equiv (\forall x)(\neg F), \\ (\forall x)(F \wedge G) &\equiv (\forall x)F \wedge (\forall x)G, & (\exists x)(F \vee G) &\equiv (\exists x)F \vee (\exists x)G, \\ (\forall x)H &\equiv H, & (\exists x)H &\equiv H. \end{aligned}$$

**35.\* Tétel.** Ha két, egymással logikailag ekvivalens, ítéletkalkulusbeli (!) formula ítéletváltozóit tetszőleges predikátumkalkulusbeli formulákkal helyettesítjük, akkor logikailag ekvivalens formulákat kapunk.

**36.\* Tétel.** Ha egy formula részformuláját egy vele logikailag ekvivalens formulával kicseréljük, akkor az eredetivel logikailag ekvivalens formulát kapunk.

**37. Megjegyzés.** Az ítéletkalkulussal ellentétben nincs algoritmus annak eldöntésére, hogy két formula logikailag ekvivalens-e, mert minden individuumentartományt és minden interpretációt meg kellene nézni.

**38.\* Tétel.** Legyen  $F$  olyan formula, amelyben csak az univerzális-, az egzisztenciális kvantor, a negáció, konjunkció és diszjunkció szerepel. Legyen  $F^*$  az a formula, amelyet az  $F$ -ből úgy kapunk, hogy

- (1) minden  $\forall$  jelet  $\exists$ -re cserélünk,
- (2) minden  $\exists$  jelet  $\forall$ -re cserélünk,
- (3) minden  $\vee$  jelet  $\wedge$ -re cserélünk,
- (4) minden  $\wedge$  jelet  $\vee$ -re cserélünk,
- (5) minden  $A$  negálatlan prímmformulát  $\neg A$ -ra cserélünk,
- (6) minden  $\neg A$  negált prímmformulát  $A$ -ra cserélünk, és
- (7) minden kifejezést meg hagyunk a prímmformulákban.

Ekkor  $\neg F \equiv F^*$ .

### 3. KÖVETKEZMÉNYFOGALOM

**39. Definíció.** Legyen  $\mathcal{A}$  formulák véges vagy végtelen halmaza, és  $B$  formula. Azt mondjuk, hogy  $B$  **logikai következménye** a  $\mathcal{A}$  formuláknak, és ezt  $\mathcal{A} \models B$ -el jelöljük, ha tetszőleges értéket adva az ítéletváltozóknak (vagy a predikátumkalkulus esetén tetszőleges individuumentartományt és interpretációt véve) minden olyan esetben, amikor a  $\mathcal{A}$  formuláinak mindegyike igaz,  $B$  is igaz. Az  $\mathcal{A}$  elemeit **premisszáknak**,  $B$ -et pedig **konklúzióknak** nevezzük.

**40. Példa.** Tekintsük az alábbi következtetést az ítéletkalkulusban: „Ha 4 osztható 2-vel, akkor 4 páros. Ha 4 páros, akkor 44 is páros. 44 páros. Tehát 4 páros.” Formalizálás után azt kell megvizsgálnunk, hogy az  $A \rightarrow B, B \rightarrow C, C \models B$  következtetés logikailag helyes-e. Az  $A = \mathbf{h}$ ,  $B = \mathbf{h}$  és  $C = \mathbf{i}$  értékadás mellett látjuk hogy a premisszák mindegyike igaz, a konklúzió viszont nem, tehát a következtetés logikailag nem helyes.

**41. Példa.** Tekintsük az alábbi következtetést a predikátumkalkulusban: „ $x$  akkor és csak akkor osztója  $y$ -nak, ha létezik olyan  $z$ , hogy  $xz = y$ . Tehát ha  $x$  osztója  $y$ -nak és  $y$  osztója  $z$ -nek, akkor  $x$  osztója  $z$ -nek”. Formalizálás után azt kell megvizsgálnunk, hogy  $(\forall x, y)(O(x, y) \leftrightarrow (\exists z)(xz = y)) \models (O(x, y) \wedge O(y, z)) \rightarrow O(x, z)$  logikai következtetés helyes-e.

Megmutatjuk, hogy a következtetés nem helyes, amihez elég mutatni egy megfelelően választott individuumtartományt és a függvényjelek és predikátumjelek megfelelő interpretációját, ahol a premisszák teljesülnek, de a konklúzió nem. Legyen  $\{0, 1, 2\}$  az individuumtartomány, a szorzásjel és az  $O$  predikátumjel interpretációi a következők

$\cdot$	0	1	2	$O$	0	1	2
0	0	1	0	0	$\mathbf{i}$	$\mathbf{i}$	$\mathbf{h}$
1	0	0	2	1	$\mathbf{i}$	$\mathbf{h}$	$\mathbf{i}$
2	0	0	0	2	$\mathbf{i}$	$\mathbf{h}$	$\mathbf{h}$

Ekkor a premissza teljesül (függetlenül attól, hogy hogyan adunk értéket a konklúzióban szereplő szabad változóknak, mivel a premissza zárt formula), a konklúzió viszont nem, például az  $x = 0, y = 1$  és  $z = 2$  értékadásnál. Nyilvánvalóan az a gond, hogy a szorzásjel interpretációja nem asszociatív. Ha felvennénk a premisszák közé a  $(\forall x, y, z)(x(yz) = (xy)z)$  formulát, akkor a következtetés már helyes lenne. (Megjegyezzük, hogy a pozitív egészek halmazán a hatványozás szintén nem asszociatív, de mégis teljesül a konklúzió ott.)

**42. Tétel.** Legyenek  $A_1, \dots, A_n, B$  formulák. Ekkor a következő feltételek ekvivalensek:

- (1)  $A_1, \dots, A_n \models B$ ,
- (2)  $A_1 \wedge \dots \wedge A_n \models B$ ,
- (3)  $\models (A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$ .
- (4)  $(A_1 \wedge \dots \wedge A_n) \rightarrow B$  tautológia.

**43. Definíció.** **Feltételes bizonyításról** beszélünk akkor, amikor az  $\mathcal{A} \models B \rightarrow C$  következtetés helyett a  $\mathcal{A} \cup \{B\} \models C$  következtetést bizonyítjuk. **Indirekt bizonyításról** beszélünk akkor, amikor az  $\mathcal{A} \models B$  következtetés helyett az  $\mathcal{A} \cup \{\neg B\} \models \mathbf{h}$  következtetést bizonyítjuk. **Kontrapozícióval való bizonyításról** beszélünk akkor, amikor az  $\mathcal{A} \cup \{B\} \models C$  következtetés helyett az  $\mathcal{A} \cup \{\neg C\} \models \neg B$  következtetést bizonyítjuk.

**44.\* Tétel (Kompaktsági tétel).**  $\mathcal{A} \models B$  akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan véges  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  részhalmaz, amelyre  $\mathcal{A}_0 \models B$ .

**45.\* Következmény.** Nem létezik olyan formula, amely akkor és csak akkor igaz egy véges gráfra, ha az összefüggő.

**46. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $\mathcal{A}$  formulák halmaza **kielégíthető**, ha van olyan individuumtartomány, a függvény- és predikátumjelek olyan interpretációja és a szabad változók olyan értékadása, amely mellett az  $\mathcal{A}$  formulák mindegyike igaz.

**47.\* Tétel.** Formulák  $\mathcal{A}$  halmaza akkor és csak akkor elégíthető ki, ha minden véges  $\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}$  részhalmaza kielégíthető.

**48.\* Következmény.** Egy gráf akkor és csak akkor háromszínezhető, ha minden véges részgráfja háromszínezhető.