

3. feladatsor – Halmazok, Leképezések

A feladatsorban \mathbb{R}^+ , illetve \mathbb{R}^- jelöli a pozitív, illetve negatív valós számok halmazát. Az $\{1, 2, \dots\}$ halmazt \mathbb{N} jelöli, \underline{n} pedig az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt.

Tekintsük az $\underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz következő kétváltozós predikátumait:

| P | 1 | 2 | 3 | 4 | Q | 1 | 2 | 3 | 4 | R | 1 | 2 | 3 | 4 |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1 | i | i | i | h | 1 | i | i | i | h | 1 | h | h | i | i |
| 2 | h | i | i | h | 2 | h | i | i | i | 2 | h | i | h | h |
| 3 | h | h | h | i | 3 | h | h | i | i | 3 | i | h | i | i |
| 4 | h | i | h | i | 4 | i | h | h | i | 4 | i | h | i | h |

3.1. Feladat. Legyenek az $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ alaphalmaz részalmazai $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{3, 4, 5, 6\}$, $C = \{1, 4, 5\}$. Adjuk meg a következő halmazokat:

$$\overline{A} \cap (B \Delta C), \quad A \setminus (\overline{B} \cup C), \quad (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$$

3.2. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

- (1) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (P(x, a) \rightarrow P(x, x))\}$,
- (2) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (\forall y \in \underline{4}) (P(a, x) \wedge (P(x, y) \vee P(y, x)))\}$,
- (3) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (R(a, x) \wedge R(x, x))\}$,
- (4) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (\exists y \in \underline{4}) (R(a, x) \rightarrow (R(x, y) \wedge R(y, a)))\}$,
- (5) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (P(a, x) \wedge P(x, b))\}$,
- (6) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (P(a, x) \rightarrow P(b, x))\}$,
- (7) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (R(a, x) \wedge R(x, b))\}$,
- (8) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (R(a, x) \rightarrow R(b, x))\}$.

3.3. Feladat. Adjuk meg a következő halmazok elemeit:

- (1) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A) R(a, a)\}$,
- (2) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A) (\forall b \in A) R(a, b)\}$,
- (3) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A) Q(a, 2)\}$,
- (4) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A) (\exists b \in A) Q(a, b)\}$.

3.4. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

- (1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
- (2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,
- (3) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

3.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra

- (1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
- (2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, de általában $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

3.6. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott részalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban.

- (1) $\{(x, y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
- (2) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
- (3) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

3.7. Feladat. Döntsük el, hogy α, β , illetve α^{-1} leképezés-e.

- (1) $\alpha = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (2, 5), (1, 1)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$,
 $\beta = \{(5, 2), (4, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$,

- (2) $\alpha = \{(2, 3), (2, 1), (4, 4), (3, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$
 $\beta = \{(1, 4), (5, 3), (2, 1), (4, 2), (3, 1), (1, 3), (2, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$,
(3) $\alpha = \{(2, 3), (2, 1), (1, 5), (4, 4), (3, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$
 $\beta = \{(1, 4), (5, 3), (4, 2), (3, 2), (1, 3), (2, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$.

3.8. Feladat. Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait. Az x szám n -es maradékát $\bar{x}^{(n)}$ -nel jelöljük.

- (1) $\alpha: \underline{6} \rightarrow \underline{4}, x \mapsto \bar{x}^{(4)} + 1$ $\beta: \underline{4} \rightarrow \underline{6}, x\beta = \bar{x}^{(6)} + 1,$
(2) $\alpha: \underline{6} \rightarrow \underline{4} = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (2, 4), (3, 3), \\ (4, 1), (5, 2), (6, 3) \end{array} \right\}, \beta: \underline{4} \rightarrow \underline{6}, x\beta = \begin{cases} x+2 & \text{ha } x \text{ páros} \\ x & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$

3.9. Feladat. Döntsük el, hogy leképezések-e.

- (1) $\{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(2) $\{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
(3) $\{(x, y) : y^2 = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$,
(4) $\{(x, y) : y^3 = x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$,
(5) $\{(x, y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$,
(6) $\{(x, y) : |y| = x\} \subseteq \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^-$.

3.10. Feladat. Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ leképezéseket!

- (1) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = x^2, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 3x + 1,$
(2) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = |x|, \beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\beta = 2x + 3.$

3.11. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

- (1) $\varphi_1 = \{(1, 4), (2, 3), (5, 3), (6, 1), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
(2) $\varphi_2 = \{(1, 4), (4, 2), (3, 1), (2, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
(3) $\varphi_3 = \{(1, 5), (2, 3), (5, 4), (3, 1), (4, 2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$.

3.12. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e.

- (1) $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto |x| + 1,$
(2) $\beta: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x-8}{7},$
(3) $\gamma: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto 2^p 3^q, \text{ ahol } (p, q) = 1, p, q > 0,$
(4) $\delta: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{N}, x = \frac{p}{q} \mapsto q, \text{ ahol } (p, q) = 1, p, q > 0,$
(5) $\varphi: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, x \mapsto (x-1, x+1),$
(6) $\psi: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto n \text{ pozitív osztóinak száma.}$

3.13. Feladat. Ellenőrizzük, hogy bijektívek az alábbi leképezések, és adjuk meg az inverzüket!

- (1) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x\alpha = 3x - 1,$
(2) $\beta: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+, x\beta = (x+2)^2 - 4.$

3.14. Feladat. Adjuk meg a következő bijektív leképezések inverzét.

- (1) $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{3x-8}{5},$
(2) $\beta: \mathbb{R}^- \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2,$
(3) $\gamma: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, x\gamma = \begin{cases} x-1, & \text{ha } x \text{ páros,} \\ x+1 & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}.$

3.15. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{3}$ -ból $\underline{2}$ -be menő injektív, illetve szürjektív leképezést.

3.16. Feladat. Adjuk meg az összes, $\underline{3}$ -ból $\{a, b, c\}$ -be menő bijektív leképezést.

3.17. Feladat. Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

- (1) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
- (2) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni.
- (3) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?

3.18. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között:

- (1) \mathbb{Z} és $\mathbb{Z} \setminus \{0\}$,
- (2) \mathbb{Q} és $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$,
- (3) $(0, 1)$ és $[0, 1]$,
- (4) \mathbb{R} és \mathbb{R}^+ ,
- (5) $\{a \in \mathbb{N} : a \geq 10\}$ és $\{2z : z \in \mathbb{Z}\}$,
- (6) $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

3.19. Feladat. Határozzuk meg a következő halmazok számosságait:

- (1) $\mathbb{N} \times \{1, 2\}$,
- (2) $\mathbb{N} \times \mathbb{R}$,
- (3) $P(\mathbb{Q})$,
- (4) a végtelen 0-1 sorozatok halmaza.

3.20. Feladat. Írjuk fel az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

- (1) $\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 4 & 2 & 3 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$,
- (2) $\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 6 & 5 & 2 & 4 & 3 & 7 \end{pmatrix}$,
- (3) $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 5 & 7 & 1 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix}$.

3.21. Feladat. Adjuk meg a következő S_7 -beli, páronként idegen ciklusok szorzataként előállított permutációkat kétsoros írásmódban:

- (1) $\delta = (1\ 3\ 6)(2\ 7\ 5\ 4)$,
- (2) $\varepsilon = (1\ 7)(2\ 6)(3\ 4\ 5)$,
- (3) $\eta = (1\ 5\ 4\ 2\ 7\ 3)$.

3.22. Feladat. Az előző két feladatban bevezetett jelöléseket felhasználva adjuk meg az alábbi S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

- (1) $\alpha\beta$, (2) $\beta\alpha$, (3) $(\beta\alpha)^{-1}$, (4) β^2 , (5) β^{2013} , (6) α^8 , (7) $\varepsilon\eta^{-1}\beta\gamma\delta^{-1}$.

3.23. Feladat. Adjuk meg a következő S_9 -beli permutációkat páronként idegen ciklusok szorzataként:

- (1) $((1\ 2\ 4)^5(1\ 3\ 4))^{-4}$,
- (2) $((1\ 2\ 4\ 3)^{-6}(1\ 5\ 4)^{13})^{-4}$,

$$(3) \left(((1346)(25798))^{-1} ((176)(284)(39))^2 (1346)(25798) \right)^{109},$$

$$(4) \left((154372)^9 ((293)(4527))^{120} (481) \right)^{-1}.$$

3.24. Feladat. Keressük meg azokat a $\sigma \in S_8$ permutációkat, amelyekre teljesülnek a következő összefüggések:

$$(1) (153)\sigma(621)(413) = (315),$$

$$(2) ((1234)(738))^3 \sigma(34) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 5 & 6 & 4 & 3 & 1 & 2 & 7 \end{pmatrix}^{-1},$$

$$(3) (2436)^{14} \sigma(1235)^{-9} = (1423)^{12}.$$

3.25. Feladat. Döntsük el, hogy a 3.20. és a 3.21. feladatban bevezetett $\alpha, \dots, \eta \in S_7$ permutációk, valamint a segítségükkel megadott alábbi permutációk párosak vagy páratlanok:

$$(1) (\eta^{-1} \delta^{112})^{111}; \quad (2) (\varepsilon \gamma \alpha)^{-1} (\beta^{-1} \delta \eta^9)^2.$$

3.26. Feladat. Hány olyan $\sigma \in S_6$ permutáció van, amelyre

$$(1) |M_\sigma| = 0,$$

$$(2) |M_\sigma| = 1,$$

$$(3) |M_\sigma| = 2;$$

$$(4) |M_\sigma| = 3;$$

$$(5) |M_\sigma| = 4;$$

$$(6) |M_\sigma| = 5;$$

$$(7) |M_\sigma| = 6.$$

3.27. Feladat. Hány másodrendű elem van S_{25} -ben? Ezek közül hány páros?

3.28. Feladat. Adjuk meg S_6 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^6 = \text{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

3.29. Feladat. Adjuk meg S_{12} összes olyan páros π permutációját, amelyre $\pi^6 = \text{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.