

# MBLK12: Halmazok, Leképezések (levelező)

(előadásvázlat)

Maróti Miklós

Jelölje  $\mathbb{Z}$  az egész számok halmazát,  $\mathbb{N}$  a pozitív egészek halmazát,  $\mathbb{Q}$  a racionális számok halmazát,  $\mathbb{R}$  a valós számok halmazát, és  $\mathbb{R}_0^+$  a nem negatív valós számok halmazát.

## 1. HALMAZOK

**1. Megjegyzés.** A **halmaz** és a halmaz **eleme** alapfogalmak, nem definiáljuk. Az  $a \in A$  jelölést használjuk annak kifejezésére, hogy  $a$  eleme  $A$ -nak. A  $\neg(a \in A)$  formula helyett  $a \notin A$ -t írunk. Megjegyezzük, hogy egy elem nem lehet többször eleme egy halmaznak, azaz csak az számít, hogy az adott elem eleme-e a halmaznak vagy sem. A halmazelmélet axiomatikus felépítésében csak azt tesszük fel, hogy  $\in$  kétváltozós predikátumjel, és az individuumtartományunk a halmazok összessége.

**2. Definíció.** Ha az  $A$  és  $B$  halmazoknak ugyan azok az elemei, azaz  $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ , akkor azt mondjuk, hogy **egyenlők**, és azt írjuk, hogy  $A = B$ . Ha  $A$  minden eleme  $B$ -nek is eleme, azaz  $(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B)$ , akkor azt mondjuk, hogy  $A$  **részhalmlaza**  $B$ -nek, és azt írjuk hogy  $A \subseteq B$ . Az  $A$  halmaz **valódi részhalmlaza**  $B$ -nek, amelyet  $A \subset B$ -vel jelölünk, ha  $A \subseteq B$ , de  $A \neq B$ .

**3. Definíció.** Azt a halmazt, melynek nincsen eleme, **üreshalmaznak** nevezzük és  $\emptyset$ -el jelöljük, azaz  $\neg(\exists x)(x \in \emptyset)$  teljesül.

**4. Tétel.** Tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra

- (1)  $A \subseteq A$  és  $\emptyset \subseteq A$ ;
- (2) ha  $A \subseteq B$  és  $B \subseteq C$ , akkor  $A \subseteq C$ ;
- (3)  $A = B$  akkor és csak akkor, ha  $A \subseteq B$  és  $B \subseteq A$ .

**5. Definíció.** Legyenek  $a_1, \dots, a_n$  nem feltétlen különböző elemek. Ekkor  $\{a_1, \dots, a_n\}$  azt az  $A$  halmazt jelöli, amelynek pontosan  $a_1, \dots, a_n$  az elemei, azaz  $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow (x = a_1 \vee \dots \vee x = a_n))$ .

**6. Példa.** Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{1, 2\}; \quad B = \{1, 3 - 1\}; \quad C = \{1, 1, 2\}; \quad D = \{\emptyset, 1, 2\}; \quad E = \{\{1\}, 2\}; \quad F = \{\{1, 2\}\}.$$

Ekkor  $A = B = C$ , a többi mind különböző.  $D$ -nek három,  $F$ -nek egy eleme van, a többinek kettő.  $\{1\}$  részhalmlaza  $A, B, C$  és  $D$ -nek, de  $E$  és  $F$ -nek nem.  $\{1\}$  csak  $E$ -nek eleme, a többinek nem.

**7. Definíció.** Legyen  $F$  olyan formula, melynek csak  $x$  a szabad változója. Ekkor  $\{x : F\}$  azt az  $A$  halmazt jelöli, amelyre  $(\forall x)(F \leftrightarrow x \in A)$  teljesül. Ha nem világos, hogy  $x$  milyen  $U$  individuumtartomány eleme lehet, akkor az  $\{x \in U : F\}$  jelölést használjuk. Formula helyett sokszor csak szöveges predikátumot írunk amelyet megfelelően lehetne formalizálni.

**8. Példa.** A következő halmazok mind egyenlők:  $\{1, 2, 3, 6\}$ ,  $\{x \in \mathbb{N} : x \mid 6\}$ ,  $\{x \in \mathbb{Z} : x \geq 1 \text{ és } x \mid 6\}$ ,  $\{\text{hat pozitív osztói}\}$ .

**9. Definíció.** Tetszőleges  $A$  és  $B$  halmazokra definiáljuk az **egyesítésüket** és **metszetüket**:

$$A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}, \quad A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}.$$

Azt mondjuk, hogy  $A$  és  $B$  **diszjunktak**, ha  $A \cap B = \emptyset$ .

**10. Definíció.** Legyen rögzítve egy  $U$  univerzum. Ekkor tetszőleges  $A \subseteq U$  halmazra definiáljuk az  **$A$  komplementerét**:

$$\bar{A} = \{x \in U : x \notin A\}.$$

**11. Definíció.** Tetszőleges  $A$  és  $B$  halmazokra definiáljuk a **különbségüket** és **szimmetrikus különbségüket**:

$$A \setminus B = \{x : x \in A \wedge x \notin B\}, \quad A \triangle B = \{x : x \in A \leftrightarrow x \notin B\}.$$

**12. Tétel.** Tetszőleges  $A, B, C \subseteq U$  halmazokra

$$\begin{array}{lll} A \cap A = A, & A \cup A = A, & \text{(idempotencia)} \\ A \cap B = B \cap A, & A \cup B = B \cup A, & \text{(kommutativitás)} \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C), & (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C), & \text{(asszociativitás)} \\ (A \cup B) \cap A = A, & (A \cap B) \cup A = A, & \text{(abszorptivitás)} \\ (A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C), & (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C), & \text{(disztributivitás)} \end{array}$$

$$\begin{array}{lll} \overline{\overline{A}} = A, & & \text{(dupla tagadás)} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}, & \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}, & \text{(De Morgan szabályok)} \\ A \cap \overline{A} = \emptyset, & A \cup \overline{A} = U, & \\ A \cap U = A, & A \cup U = U, & \\ A \cap \emptyset = \emptyset, & A \cup \emptyset = A & \end{array}$$

$$A \setminus B = A \cap \overline{B} \qquad A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A).$$

**13. Definíció.** Tetszőleges  $a, b$  elemekre definiáljuk az  $(a, b)$  **rendezett elempárt**. Az  $(a, b)$  rendezett elempárnak  $a$  és  $b$  az **első**, illetve a **második koordinátája**. Két rendezett elempár akkor és csak akkor egyenlő, ha a megfelelő koordinátáik egyenlők.

**14. Definíció.** Tetszőleges  $A, B$  halmazokra definiáljuk a **Descartes-szorzatukat**:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}.$$

**15. Példa.** Az  $A = \{1, 2\}$  kételemű és  $B = \{3, 4, 5\}$  háromelemű halmazok Descartes-szorzata  $A \times B = \{(1, 3), (1, 4), (1, 5), (2, 3), (2, 4), (2, 5)\}$  hatelemű halmaz. Vegyük észre, hogy  $\emptyset \times B = \emptyset$ , mert ha  $(a, b)$  eleme lenne a Descartes-szorzatnak, akkor  $a \in \emptyset$  lenne, ami nem lehet.

**16. Definíció.** Tetszőleges  $A$  halmaz esetén az  $A$  összes részhalmazainak halmazát az  $A$  **hatványhalmazának** nevezzük és  $\mathcal{P}(A)$ -val jelöljük, azaz

$$\mathcal{P}(A) = \{X : X \subseteq A\}.$$

**17. Példa.** Az  $A = \{1, 2, 3\}$  háromelemű halmaz hatványhalmaza

$$\mathcal{P}(\{1, 2, 3\}) = \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}$$

8-elemű. Az üreshalmaznak csak az üreshalmaz a részhalmaza, ezért  $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ , azaz egy olyan halmaz, amelynek egyetlen eleme van, az üreshalmaz. Gondoljuk át, hogy  $\mathcal{P}(\mathcal{P}(\emptyset)) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ .

## 2. LEKÉPEZÉSEK ÉS PERMUTÁCIÓK

**18. Definíció.** Tetszőleges  $A, B$  halmazokra a  $\varrho \subseteq A \times B$  részhalmazt **leképezésnek** nevezzük, ha minden  $a \in A$  elemre pontosan egy  $b \in B$  elem létezik, amelyre  $(a, b) \in \varrho$ . Ilyenkor a  $\varrho: A \rightarrow B$  jelölés használjuk, továbbá  $(a, b) \in \varrho$  helyett azt mondjuk hogy az  $a$  **elem**  $\varrho$  melletti **képe**  $b$ , és azt írjuk, hogy  $a\varrho = b$  vagy  $a \mapsto b$ . Az  $A$  halmazból  $B$ -be menő összes leképezés halmazát  $B^A$ -val jelöljük.

**19. Példa.** Minden leképezés elempárok halmaza. Vegyük például az  $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$  halmazon az abszolútérték függvényt. Ekkor ez leképezés amely egyenlő a  $\{(-2, 2), (-1, 1), (0, 0), (1, 1), (2, 2)\}$  halmazzal.

**20. Definíció.** A  $\varrho: A \rightarrow B$  és a  $\sigma: B \rightarrow C$  **leképezések szorzatán** azt a  $\varrho\sigma: A \rightarrow C$  leképezést értünk, amelyre  $a \in A$  elem képe a  $c \in C$  pontosan akkor, ha létezik  $b \in B$ , amelyre  $a\varrho = b$  és  $b\sigma = c$ .

**21. Tétel.** Ha  $\varrho: A \rightarrow B$  és  $\sigma: B \rightarrow C$  leképezések, akkor  $\varrho\sigma: A \rightarrow C$  is leképezés és tetszőleges  $a \in A$  elemre  $a(\varrho\sigma) = (a\varrho)\sigma$ .

**22. Definíció.** Tetszőleges  $A$  halmazon definiáljuk az **identikus leképezést**:

$$\text{id}_A = \{ (a, b) \in A \times A : a = b \},$$

más jelölést használva:

$$\text{id}_A: A \rightarrow A, \quad a \text{id}_A = a$$

**23. Tétel.** Tetszőleges  $\varrho: A \rightarrow B$  leképezésre  $\text{id}_A \varrho = \varrho$  és  $\varrho \text{id}_B = \varrho$ .

**24. Tétel.** Tetszőleges  $\varrho: A \rightarrow B$ ,  $\sigma: B \rightarrow C$  és  $\tau: C \rightarrow D$  leképezésekre  $(\varrho\sigma)\tau = \varrho(\sigma\tau)$ , azaz a szorzás asszociatív.

**25. Példa.** Vegyük az  $A = \{1, 2, 3\}$  halmazon a  $\varrho = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$  és  $\sigma = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}$  leképezéseket. Ekkor  $\varrho\sigma = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2)\}$  és  $\sigma\varrho = \{(1, 3), (2, 2), (3, 1)\}$ , azaz a szorzás nem kommutatív.

**26. Definíció.** A  $\varrho: A \rightarrow B$  leképezés **szürjektív** (vagy **ráképezés**), ha minden elem előfordul képelemként, azaz ha

$$(\forall b \in B)(\exists a \in A)(a\varrho = b).$$

A  $\varrho: A \rightarrow B$  leképezés **injektív** (vagy **kölcsönösen egyértelmű**), ha különböző elemek képe különböző, azaz ha

$$(\forall a_1, a_2 \in A)(a_1\varrho = a_2\varrho \rightarrow a_1 = a_2).$$

A  $\varrho$  leképezés **bijektív** (vagy **kölcsönösen egyértelmű ráképezés**), ha szürjektív és injektív is.

**27. Példa.** A 19. példában szereplő leképezés nem szürjektív, mert például a  $-1$  nem fordul elő képként, és nem is injektív, mert a  $-2$  és a  $2$  képe megegyezik.

**28. Definíció.** A  $\varrho \subseteq A \times B$  **leképezés inverze** a

$$\varrho^{-1} = \{ (b, a) \in B \times A : (a, b) \in \varrho \}.$$

**29. Tétel.** A  $\varrho: A \rightarrow B$  leképezésnek az inverze akkor és csak akkor leképezés, ha  $\varrho$  bijektív.

**30. Tétel.** Tetszőleges  $\varrho: A \rightarrow B$  és  $\sigma: B \rightarrow C$  leképezésekre

- (1) ha  $\varrho$  és  $\sigma$  szürjektív, akkor  $\varrho\sigma$  is szürjektív;
- (2) ha  $\varrho$  és  $\sigma$  injektív, akkor  $\varrho\sigma$  is injektív;
- (3) ha  $\varrho$  és  $\sigma$  bijektív, akkor  $\varrho\sigma$  is bijektív;
- (4) ha  $\varrho\sigma$  szürjektív, akkor  $\sigma$  szürjektív;
- (5) ha  $\varrho\sigma$  injektív, akkor  $\varrho$  injektív;
- (6) ha  $\varrho\sigma$  bijektív, akkor  $\varrho$  injektív és  $\sigma$  szürjektív;
- (7) ha  $\varrho$  bijektív, akkor  $\varrho^{-1}$  is bijektív.

**31. Tétel.** Tetszőleges  $\varrho: A \rightarrow B$ ,  $\sigma: B \rightarrow C$  bijektív leképezésre

- (1)  $\varrho\varrho^{-1} = \text{id}_A$ ,
- (2)  $\varrho^{-1}\varrho = \text{id}_B$ ,
- (3)  $(\varrho\sigma)^{-1} = \sigma^{-1}\varrho^{-1}$ .

**32. Definíció.** Az  $A$  halmaz **permutációin** a  $\pi: A \rightarrow A$  bijektív leképezéseket értjük. Az  $A$  halmaz összes permutációinak halmazát  $\text{Sym}(A)$ -val jelöljük, speciálisan tetszőleges  $n$  pozitív egésze az  $\{1, \dots, n\}$  halmaz összes permutációinak halmazát  $S_n$  jelöli.

**33. Jelölés.** A  $\pi \in S_n$  permutációt megadhatjuk elempárok halmazaként:  $\pi = \{(1, 1\pi), (2, 2\pi), \dots, (n, n\pi)\}$ , vagy kétsoros írásmóddal:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ 1\pi & 2\pi & \dots & n\pi \end{pmatrix}$$

**34. Példa.** Ha  $\alpha \in S_3$  az a permutáció, amelyre  $1\alpha = 2$ ,  $2\alpha = 1$  és  $3\alpha = 3$ , akkor

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \{(1, 2), (2, 1), (3, 3)\}.$$

**35. Példa.** Számoljuk ki az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ és } \beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutációk szorzatát. A 21. tétel alapján az elemek képe a következőképpen számolható:

$$\begin{aligned} 1(\alpha\beta) &= (1\alpha)\beta = 2\beta = 3, \\ 2(\alpha\beta) &= (2\alpha)\beta = 1\beta = 2, \\ 3(\alpha\beta) &= (3\alpha)\beta = 3\beta = 1, \end{aligned}$$

azaz

$$\alpha\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Számoljuk ki  $\beta$  inverzét. Mivel

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \{(1, 2), (2, 3), (3, 1)\}$$

ezért

$$\beta^{-1} = \{(2, 1), (3, 2), (1, 3)\} = \{(1, 3), (2, 1), (3, 2)\} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

**36. Definíció.** A  $\pi \in S_n$  permutáció az  $x \in \{1, \dots, n\}$  elemet **mozgatja**, ha  $x\pi \neq x$ . A  $\pi \in S_n$  által **mozgatott elemek halmazát**  $M_\pi$ -vel jelöljük, azaz

$$M_\pi = \{x \in \{1, \dots, n\} : x\pi \neq x\}.$$

**37. Példa.** Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció által mozgatott elemek halmaza  $M_\alpha = \{1, 2\}$ .

**38. Definíció.** A  $\pi, \sigma \in S_n$  permutációkat **idegennek** nevezzük, ha  $M_\pi \cap M_\sigma = \emptyset$ .

**39. Tétel.** Ha a  $\pi, \sigma \in S_n$  permutációk idegenek, akkor

- (1)  $\pi\sigma = \sigma\pi$ , és
- (2)  $(\pi\sigma)^k = \pi^k\sigma^k$  minden  $k$  egészszre.

**40. Definíció.** Legyen  $n \geq k \geq 2$ , és az  $a_1, \dots, a_k \in \{1, \dots, n\}$  elemek páronként különbözőek. Ekkor azt a  $\pi \in S_n$  permutációt, amelyre

$$a_1\pi = a_2, \quad a_2\pi = a_3, \quad \dots \quad a_{k-1}\pi = a_k, \quad a_k\pi = a_1,$$

és  $x\pi = x$  minden  $x \in \{1, \dots, n\} \setminus \{a_1, \dots, a_k\}$  elemre, **ciklusnak** nevezzük és röviden így jelöljük:

$$\pi = (a_1 \ a_2 \ \dots \ a_k).$$

A  $k$  számot a ciklus **hosszának** nevezzük. A 2 hosszúságú ciklusokat **transzpozícióknak** hívjuk.

**41. Példa.** Az

$$\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

permutáció ciklus, mivel a  $k = 2$ ,  $a_1 = 1$  és  $a_2 = 2$  választással éppen ezt a permutációt kapjuk, azaz  $\alpha = (1 \ 2)$ . Mivel  $\alpha$  hossza éppen 2, ezért  $\alpha$  transzpozíció is. A

$$\beta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

permutáció szintén ciklus, és  $\beta = (1 \ 2 \ 3)$ .

**42. Megjegyzés.** Vegyük észre, hogy egy permutáció ciklusos alakban való megadása nem egyértelmű! Egyrészt ugyanazt a permutációt többféleképpen is felírhatjuk ciklusként:

$$(1\ 2\ 3) = (2\ 3\ 1) = (3\ 1\ 2).$$

A másik probléma pedig az, hogy az  $(1\ 2\ 3)$  permutációról nem tudjuk eldönteni, hogy az  $S_3$  vagy esetleg az  $S_4$  csoport eleme-e. Természetesen ha  $S_3$ -beli permutációkról beszélünk, akkor

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

viszont  $S_4$ -ben már

$$(1\ 2\ 3) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix},$$

és ez a két permutáció nem ugyanaz. Ugyan ez a probléma az identikus permutáció „id” jelölésével is, arról sem lehet eldönteni, hogy melyik permutációcsoportban használjuk.

**43. Példa.** Természetesen nem minden permutáció ciklus, például a következő  $\pi$  permutáció sem ciklus, de előáll ciklusok szorzataként:

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} = (1\ 2\ 3)(4\ 5).$$

**44. Tétel.** Minden  $S_n$ -beli permutáció előáll páronként idegen ciklusok szorzataként, és ez az előállítás a tényezők sorrendjétől eltekintve egyértelműen meghatározott. (Az identikus permutációt ciklusok üres szorzatának tekintjük.)

**45. Példa.** Adjuk meg a  $\pi = (5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7)$  permutációt páronként idegen ciklusok szorzataként. Tekintsük azokat az elemeket, melyeket a szorzat valamely tényezője mozgat:  $\{1, 2, 3, 4, 5, 7\}$ . Vegyünk ki ezek közül egyet, mondjuk az 1-gyet, és számoljuk ki, hogy ezt a  $\pi$  permutáció milyen elemekbe viszi át:

$$1\pi = 1(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 3(4\ 3\ 7) = 7.$$

Folytassuk a kapott elemekkel, azaz

$$7\pi = 7(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 7(4\ 3\ 7) = 4,$$

$$4\pi = 4(5\ 2\ 3\ 4)(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 5(1\ 3\ 5)(4\ 3\ 7) = 1(4\ 3\ 7) = 1.$$

Visszaértünk ahhoz az elemhez, amiből kiindultunk, tehát megvan az első ciklusunk:  $(1\ 7\ 4)$ . A maradék elemekből vegyük a következőt, mondjuk a 2-t, és számoljuk ki hogy ezt  $\pi$  milyen elemekbe viszi át, és így tovább folytatva megkapjuk a  $\pi$  permutációt páronként idegen ciklusok szorzatára bontott alakban:

$$\pi = (1\ 7\ 4)(2\ 5).$$

**46. Tétel.** Tetszőleges  $\pi = (a_1\ a_2\ \dots\ a_k) \in S_n$  ciklusra

$$(1) \pi^{-1} = (a_k\ a_{k-1}\ \dots\ a_1),$$

$$(2) \pi^k = \text{id},$$

$$(3) \text{Ha } i \equiv j \pmod{k}, \text{ akkor } \pi^i = \pi^j.$$

**47. Tétel.** Tetszőleges ciklus felírható transzpozíciók szorzataként, mégpedig

$$(a_1\ a_2\ a_3\ \dots\ a_k) = (a_1\ a_2)(a_1\ a_3)\dots(a_1\ a_k).$$

Következésképpen, minden permutáció transzpozíciók szorzatára bontható (de ez általában nem egyértelmű).

**48. Példa.**  $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (1\ 2)(1\ 3)(1\ 4)(5\ 6)$ , de mivel  $(1\ 2\ 3\ 4) = (2\ 3\ 4\ 1)$ , ezért  $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (2\ 3)(2\ 4)(2\ 1)(5\ 6)$ , vagy  $(1\ 2\ 3\ 4)(5\ 6) = (2\ 3)(5\ 6)(2\ 4)(2\ 1)$ , mert idegen transzpozíciók felcserélhetők.

**49.\* Tétel.** Minden permutáció vagy csak páros vagy csak páratlan sok transzpozíció szorzataként írható fel.

**50. Definíció.** A  $\pi \in S_n$  permutációt **párosnak** nevezzük, ha felbontható páros sok transzpozíció szorzatára. A nempáros permutációkat **páratlannak** nevezzük.

### 3. HALMAZOK ELEMSZÁMA

**51. Definíció.** Azt mondjuk, hogy az  $A$  és  $B$  halmazok **elemszáma megegyezik**, és azt írjuk, hogy  $|A| = |B|$ , ha létezik bijektív leképezés  $A$ -ból  $B$ -re. Azt mondjuk, hogy az  $A$  halmaz  **$n$ -elemű**, és azt írjuk, hogy  $|A| = n$ , ha  $n$  nemnegatív egész és létezik  $A$ -ból bijektív leképezés az  $\{1, 2, \dots, n\}$  halmazra.

**52. Példa.** Az  $\emptyset$  halmaz nulla elemű. Az  $\{\emptyset\}$  halmaz egyelemű, mert  $\{(\emptyset, 1)\}$  bijektív leképezés  $\{\emptyset\}$ -ből  $\{1\}$ -be.

**53. Tétel.** Tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra

- (1)  $|A| = |A|$ ;
- (2) ha  $|A| = |B|$ , akkor  $|B| = |A|$ ;
- (3) ha  $|A| = |B|$  és  $|B| = |C|$ , akkor  $|A| = |C|$ ;
- (4) ha  $|A| = |B|$ , akkor  $|A \times C| = |B \times C|$ ;
- (5) ha  $|A| = |B|$ , akkor  $|A^C| = |B^C|$ ;
- (6) ha  $|A| = |B|$ , akkor  $|C^A| = |C^B|$ .

**54. Tétel.** Ha  $|A| = n$ ,  $|B| = m$  és az  $A$  és  $B$  halmazok diszjunktak, akkor  $|A \cup B| = n + m$ .

**55. Tétel.** Tetszőleges  $A$  halmazra  $|\mathcal{P}(A)| = |\{0, 1\}^A|$ . Ha  $|A| = n$ , akkor  $|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ .

**56. Tétel.** Ha  $|A| = n$  és  $0 \leq k \leq n$ , akkor  $|\{B \in \mathcal{P}(A) : |B| = k\}| = \binom{n}{k}$ .

**57.\* Tétel.** Tetszőleges  $A, B$  halmazokra  $|A \times B| = |B \times A|$ . Ha  $|A| = n$  és  $|B| = m$ , akkor  $|A \times B| = nm$ .

**58. Tétel.** Ha  $|A| = n$ , akkor  $|\text{Sym}(A)| = n!$ , speciálisan  $|S_n| = n!$ .

**59.\* Tétel.** Tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra ha  $B$  és  $C$  diszjunktak, akkor  $|A^{B \cup C}| = |A^B \times A^C|$ . Ha  $|A| = n$  és  $|B| = m$ , akkor  $|A^B| = n^m$ .

**60.\* Tétel.** Tetszőleges  $A, B, C$  halmazokra  $|(A^B)^C| = |A^{(B \times C)}|$ .

**61.\* Tétel.**  $|\mathbb{N}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{Z}[x]| = |\mathbb{Q}|$ , ahol  $\mathbb{Z}[x]$  az egészegyütthatós polinomok halmaza (egészek olyan  $(a_0, a_1, a_2, \dots)$  végtelen sorozatai, amelyek egy idő után azonosan nullák).

**62.\* Tétel.**  $|\mathbb{R}| = |\{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1\}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}| = |\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| \neq |\mathbb{N}|$ .

**63.\* Tétel (Cantor-tétel).** Tetszőleges  $A$  halmazra  $|\mathcal{P}(A)| \neq |A|$ .

**64. Definíció.** Az  $A$  halmaz **véges**, ha létezik olyan  $n$  nemnegatív egész, hogy  $|A| = n$ . Az  $A$  halmaz **megszámlálhatóan végtelen**, ha  $|A| = |\mathbb{N}|$ , ekkor azt írjuk, hogy  $|A| = \aleph_0$ . Az  $A$  halmaz **megszámlálható**, ha  $A$  véges vagy megszámlálhatóan végtelen. Az  $A$  halmaz **kontinuum számosságú**, ha  $|A| = |\mathbb{R}|$ , ekkor azt írjuk, hogy  $|A| = \mathfrak{c}$ .

**65.\* Tétel.** Az  $A$  halmaz akkor és csak akkor véges, ha minden  $f: A \rightarrow A$  injektív (szürjektív) leképezés bijektív.

**66. Definíció.** Ha létezik injektív leképezés  $A$ -ból  $B$ -be, akkor azt írjuk, hogy  $|A| \leq |B|$ .

**67.\* Tétel (Schröder-Bernstein-tétel).** Tetszőleges  $A, B$  halmazokra ha léteznek  $f: A \rightarrow B$  és  $g: B \rightarrow A$  injektív leképezések, akkor létezik  $h: A \rightarrow B$  bijektív leképezés is. Tehát ha  $|A| \leq |B|$  és  $|B| \leq |A|$ , akkor  $|A| = |B|$ .

### 4. AXIOMATIKUS FELÉPÍTÉS

**68. Példa (Russel-paradoxon).** A 7. definíciót felhasználva definiáljuk az

$$R = \{x : x \text{ halmaz, és } x \notin x\}$$

halmazt. Ekkor se  $R \in R$ , se  $R \notin R$  nem teljesülhet, tehát  $R$  nem lehet halmaz.

**69. Megjegyzés.** A halmazelmélet axiomatikus felépítésében meg kell követelnünk, hogy a 7. definícióban szereplő  $U$  individuumtartomány csak halmaz lehet (például az összes halmaz összessége nem), és így elkerülhető a Russel-paradoxon.

**70. Megjegyzés.** Ha a 7. definíciót csak részhalmazok definiálására használhatjuk, akkor külön meg kell követelnünk, hogy létezik az üres halmaz, és tetszőleges  $A, B$  halmazokra léteznek a  $\{A, B\}$ ,  $A \cup B$  és  $P(A)$  halmazok is.

**71. Megjegyzés.** Az előbb megkövetelt halmazok létezésén kívül feltesszük még, hogy van végtelen halmaz (olyan  $A$  halmaz, hogy ha  $x \in A$ , akkor  $x \cup \{x\} \in A$ ), és azt, hogy minden nemüres  $A$  halmaznak van olyan  $x \in A$  eleme, hogy  $A \cap x = \emptyset$ .

**72.\* Definíció.** Az előző megjegyzésekben leírt tulajdonságok (végtelen sok) formulával formalizálhatók. Ezen formulák összességét nevezik a halmazelmélet **Zermelo-Fraenkel axiómarendszerének**, vagy röviden ZF-nek.

**73.\* Definíció.** A **kontinuumhipotézis** az az állítás, hogy tetszőleges  $A$  halmazra  $|A| \leq |\mathbb{N}|$  vagy  $|\mathbb{R}| \leq |A|$ .

**74.\* Tétel.** Ha van ellentmondásmentes interpretációja a halmazelméletnek (ZFC), akkor van olyan is ahol a kontinuumhipotézis igaz, és olyan is ahol hamis.