

9. feladatsor – Permutációk

A feladatsorban az $\{1, 2, \dots\}$ halmazt \mathbb{N} jelöli és $[n] = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

Házi feladatok:

9.1. Feladat. Adjuk meg a következő permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban.

(1) $\varphi: [9] \rightarrow [9]$, $x \mapsto \overline{5x}$ (a felülvonás a 9-es maradékot jelöli),

(2) $\gamma \in S_8$, $\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 1 & 2 & 8 & 5 & 4 & 6 & 7 \end{pmatrix}$,

(3) $\psi: [7] \rightarrow [7]$, $x \mapsto 6 - x$,

(4) $\delta \in S_8$, $\delta = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 4 & 3 & 1 & 2 & 5 & 8 & 6 & 7 \end{pmatrix}$.

9.2. Feladat. Adjuk meg a következő S_7 -beli permutációkat páronként idegen ciklusokra bontott alakban.

(1) $((1\ 2\ 3)(4\ 2\ 5))^{-1}(6\ 7\ 2\ 1)^{340}$,

(2) $((1\ 2\ 3\ 4)(1\ 5\ 7))^{-1}(2\ 4\ 3\ 6)^{111}$,

(3) $((1\ 2\ 3\ 4)(4\ 2\ 7))^{-1}(7\ 1\ 5\ 6)^{125}$,

(4) $((1\ 2\ 3\ 4)(2\ 3\ 7))^{-1}(3\ 1\ 2\ 5\ 6)^{333}$,

(5) $((4\ 2\ 3)(1\ 5\ 3\ 7))^{-1}(3\ 2\ 7\ 6)^{120}$.

Gyakorló feladatok:

9.3. Feladat. Oldjuk meg a következő permutáció-egyenleteket (a megoldást természetesen páronként idegen ciklusokra bontott alakban kérjük).

(1) $\pi(1\ 2\ 3\ 4) = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$, $\pi \in S_7$,

(2) $(3\ 2\ 1)\pi(1\ 2\ 3) = (1\ 2\ 3\ 4)(5\ 7\ 6)$, $\pi \in S_7$,

(3) $(1\ 2\ 3\ 4)\pi = (3\ 4\ 1)(2\ 5\ 7)$, $\pi \in S_8$,

(4) $(4\ 5\ 6)\pi(6\ 5\ 4) = (4\ 5\ 7)(1\ 6\ 2\ 3)$, $\pi \in S_8$,

(5) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi \in S_5$,

(6) $\pi^3 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5)$, $\pi \in S_{10}$,

(7) $\pi^4 = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6)$, $\pi \in S_{10}$.

9.4. Feladat. Határozzuk meg S_5 -ben, hogy melyik ciklus-típusú permutációból hány van (a ciklus-típus a páronként idegen ciklusokra bontott alakban szereplő ciklusok hosszaiából képzett monoton növekvő sorozat).

9.5. Feladat. Határozzuk meg S_5 -ben, S_7 -ben, illetve S_9 -ben az olyan permutációk számát, melyek páronként idegen ciklusokra bontott alakjában egy 3 és egy 4 hosszú ciklus van.

9.6. Feladat. Határozzuk meg S_6 azon elemeit, amelyek pontosan 1, 2, 3, illetve 4 elemet mozgatnak.

9.7. Feladat. Adjuk meg S_6 összes olyan π permutációját, amelyre $\pi^6 = \text{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.

9.8. Feladat. Adjuk meg S_{12} összes olyan páros π permutációját, amelyre $\pi^6 = \text{id}$, és π 6-nál kisebb pozitív hatványai nem identikusak.