8. feladatsor – Számosságok

Házi feladatok:

8.1. Feladat. Adjunk meg bijekciót a következő halmazok között:

(1) $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R}_0^+$,
(2) $(0,1)$ és $[0,1]$,
(3) $(1,5)$ és $\mathbb{R}^+$,
(4) $\{x \in \mathbb{R} : 2 \geq x > 1\}$ és $\mathbb{R}$.

8.2. Feladat. Határozzuk meg a következő elemszámokat (a választ indokolni kell):

(1) $|\mathbb{N} \times \{1,2\}|$
(2) $\left|\mathbb{Q}^2\right|$
(3) $|P(\mathbb{Q})|$
(4) $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|$

Gyakorló feladatok:

8.3. Feladat. *(Hilbert szállodája)*
Képzeljünk el egy szállodát, amelynek megszámlálhatóan végtelen sok szobája van, de már minden szoba foglalt.

(1) Egy újabb vendég szeretne megszállni a szállodában. Hogyan tud a portás helyet biztosítani neki?
(2) Újabb 999999 vendég érkezik. Hogyan lehetne őket elszállásolni?
(3) A szomszéd utcában lévő hasonló végtelen szállodában tűz ütött ki, és onnan mindenki ebbe a szállodába menekül. Hogyan tudja őket elhelyezni a portás?
(4) A szomszéd utcában lévő konkurencia megszűntével a vendégek immár megszámlálhatóan végtelen sok, egyenként megszámlálhatóan végtelen sok utast szállító busszal érkeznek. El lehet szállásolni őket?

8.4. Feladat. Adjunk meg bijekciót

(1) az $\{a \in \mathbb{N} : a \geq 10\}$ és a $\{2z : z \in \mathbb{Z}\}$ halmazok között,
(2) a hárommal nem osztható pozitív egész számok és a páros számok között,
(3) a $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ és $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ halmazok között,
(4) a $\mathbb{Q}$ és $\mathbb{Q} \setminus \mathbb{N}$ halmazok között,
(5) az $\mathbb{R}$ és $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ halmazok között.

8.5. Feladat. Adjunk meg $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{Q}^+$

(1) szürjektív leképezést, és
(2) injektív leképezést.

8.6. Feladat. Adjunk meg szürjektív leképezést $\mathbb{R}$-ről $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$-re.

8.7. Feladat. *(Számosságaritmetika)*
Véges A, B halmazokra előadáson láttuk, hogy $|A \times B| = |A| \cdot |B|$, $\left|A^B\right| = |A|^{|B|}$, és diszjunkt A, B esetén $|A \cup B| = |A| + |B|$. Hogyan kellene kiterjeszteni a $+$, $\cdot$ és hatvány műveleteket a tanult végtelen számosságokra ahhoz, hogy ezek az állítások érvényben maradjanak?