

6. feladatsor – Halmazok és megfeleltetések

A feladatsorban \underline{n} jelöli az $\{1, 2, \dots, n\}$ halmazt, P, Q, R pedig a $\underline{4} = \{1, 2, 3, 4\}$ halmaz következő kétváltozós predikátumait:

P	1	2	3	4	Q	1	2	3	4	R	1	2	3	4
1	h	i	i	h	1	h	i	i	i	1	h	h	i	i
2	i	i	i	h	2	i	i	i	h	2	h	i	h	h
3	h	h	h	i	3	h	h	i	i	3	i	h	h	i
4	h	h	i	i	4	i	h	h	h	4	i	h	i	i

Házi feladatok:

6.1. Feladat. Adjuk meg az alábbi halmazműveletek eredményeit a kapott halmaz elemeinek felsorolásával. Az univerzum $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

- (1) $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{3, 4, 5, 6\}, C = \{1, 4, 5\}$
 $\overline{A} \cap (B \triangle C), A \setminus (\overline{B} \cup C), (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$
- (2) $A = \{1, 3, 4, 5\}, B = \{1, 2, 5, 6\}, C = \{1, 3, 6\}$
 $\overline{A} \cap (B \triangle C), A \setminus (\overline{B} \cup C), (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$
- (3) $A = \{1, 3, 4, 6\}, B = \{2, 4, 6\}, C = \{1, 2, 3, 4\}$
 $\overline{A} \cap (B \triangle C), A \setminus (\overline{B} \cup C), (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$
- (4) $A = \{1, 2, 4, 5\}, B = \{1, 3, 6\}, C = \{1, 2, 3, 5\}$
 $\overline{A} \cup (B \triangle C), A \setminus (\overline{B} \cap C), (A \setminus \overline{C}) \cup (C \setminus \overline{B})$

6.2. Feladat. Adjuk meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával:

- (1) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (P(x, a) \rightarrow P(x, x))\}$,
- (2) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (Q(x, a) \rightarrow Q(x, x))\}$,
- (3) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (R(x, a) \rightarrow R(x, x))\}$,
- (4) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (P(a, x) \wedge P(x, x))\}$,
- (5) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (Q(a, x) \wedge Q(x, x))\}$,
- (6) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (R(a, x) \wedge R(x, x))\}$.

Gyakorló feladatok:

6.3. Feladat. Adjuk meg a következő halmazokat elemeik felsorolásával:

- (1) $\{a \in \underline{4} : (\exists x \in \underline{4})(\forall y \in \underline{4}) (Q(a, x) \wedge (Q(x, y) \vee Q(y, x)))\}$,
- (2) $\{a \in \underline{4} : (\forall x \in \underline{4})(\exists y \in \underline{4}) (P(a, x) \rightarrow (P(x, y) \wedge P(y, a)))\}$,
- (3) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (P(a, x) \wedge P(x, b))\}$,
- (4) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\exists x \in \underline{4}) (Q(a, x) \wedge Q(x, b))\}$,
- (5) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (Q(a, x) \rightarrow Q(b, x))\}$,
- (6) $\{(a, b) \in \underline{4} \times \underline{4} : (\forall x \in \underline{4}) (R(a, x) \rightarrow R(b, x))\}$,
- (7) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A) R(a, a)\}$,
- (8) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\forall b \in A) R(a, b)\}$.
- (9) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A) P(a, 2)\}$,
- (10) $\{A \in \mathcal{P}(\underline{4}) : (\forall a \in A)(\exists b \in A) Q(a, b)\}$.

6.4. Feladat. Igazoljuk, hogy tetszőleges A, B, C halmazokra fennállnak az alábbi egyenlőségek:

- (1) $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$,
- (2) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$,

- (3) $A \Delta (A \Delta B) = B$,
 (4) $A \cap (B \Delta C) = (A \cap B) \Delta (A \cap C)$.

6.5. Feladat. Mutassuk meg, hogy tetszőleges A, B halmazokra

- (1) $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$,
 (2) $\mathcal{P}(A \cup B) \supseteq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$, de általában $\mathcal{P}(A \cup B) \neq \mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B)$.

6.6. Feladat. Döntsük el, hogy a megadott részhalmazok előállnak-e $A \times B$ alakban.

- (1) $\{(x, y) : 2 \leq x < 3, -1 < y < 2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 (2) $\{(x, y) : x = 2, y \text{ tetszőleges}\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 (3) $\{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$,
 (4) $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3), (1, 4)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$,
 (5) $\{(1, 2), (2, 3), (1, 3), (2, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{4}$.

6.7. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1, 1), (2, 3), (3, 2), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq \underline{3} \times \underline{3}.$$

Döntsük el és indokoljuk, hogy a következő formulák közül melyek teljesülnek α -ra (az individuumtartomány $\underline{3}$).

- (1) $(\forall x)(x, x) \in \alpha$,
 (2) $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in \alpha \rightarrow ((y, x) \in \alpha))$,
 (3) $(\forall x)(\forall y)((x, y) \in \alpha \wedge (y, x) \in \alpha \rightarrow x = y)$.

6.8. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(1, 2), (2, 3), (4, 1), (2, 5), (1, 1)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$

$$\beta = \{(5, 2), (4, 1), (3, 2), (2, 1), (1, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

- (1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
 (2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
 (3) Döntsük el, hogy α, β , illetve α^{-1} leképezés-e.

6.9. Feladat. Legyen

$$\alpha = \{(2, 3), (1, 5), (3, 4), (4, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{5}$$

$$\beta = \{(5, 1), (2, 3), (1, 3), (4, 2), (3, 1), (2, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{4}$$

- (1) Határozzuk meg az $\alpha\beta$ és α^{-1} megfeleltetéseket.
 (2) Határozzuk meg α értelmezési tartományát és értékkészletét.
 (3) Döntsük el, hogy α, β , illetve α^{-1} leképezés-e.

6.10. Feladat. Határozzuk meg az α és β leképezések $\alpha\beta$ és $\beta\alpha$ szorzatait. Az x szám n -es maradékát $\bar{x}^{(n)}$ -nel jelöljük.

(1) $\alpha: \underline{6} \rightarrow \underline{4}, x \mapsto \bar{x}^{(4)} + 1$ $\beta: \underline{4} \rightarrow \underline{6}, x\beta = \bar{x}^{(6)} + 1$,

(2) $\alpha: \underline{6} \rightarrow \underline{4}, \alpha = \left\{ \begin{array}{l} (1, 2), (2, 4), (3, 3), \\ (4, 1), (5, 2), (6, 3) \end{array} \right\}$, $\beta: \underline{4} \rightarrow \underline{6}, x\beta = \begin{cases} x + 2, & \text{ha } x \text{ páros} \\ x, & \text{ha } x \text{ páratlan} \end{cases}$

6.11. Feladat. Határozzuk meg a következő α, β megfeleltetések értelmezési tartományát, értékészletét, valamint $\alpha\beta$ szorzatát. Melyek leképezések, melyek parciális leképezések?

- | | |
|--|---|
| (1) $\alpha = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | (1) $\beta = \{(x, y) : y = 2x\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ |
| (2) $\alpha = \{(x, y) : x = y^2\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ | (2) $\beta = \{(x, y) : x^2 = y\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ |
| (3) $\alpha = \{(x, y) : x - y < 1\} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{Z}$ | (3) $\beta = \{(x, y) : x \leq y\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ |
| (4) $\alpha = \{(x, y) : 5x = y + 1\} \subseteq \mathbb{Q} \times \mathbb{Z}$ | (4) $\beta = \{(x, y) : x = \lfloor y \rfloor\} \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{Q}$ |

6.12. Feladat. Döntsük el a következő leképezésekről, hogy injektívek, szürjektívek, illetve bijektívek-e. A bijektíveknek adjuk meg az inverzét, a csak injektíveknek adjuk meg a parciális inverzét.

- (1) $\varphi_1 = \{(1, 4), (2, 3), (5, 3), (6, 1), (3, 3), (4, 4)\} \subseteq \underline{6} \times \underline{4}$,
- (2) $\varphi_2 = \{(1, 4), (4, 2), (3, 1), (2, 2)\} \subseteq \underline{4} \times \underline{6}$,
- (3) $\varphi_3 = \{(1, 5), (2, 3), (5, 4), (3, 1), (4, 2)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$,
- (4) $\varphi_4: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, x \mapsto 2x + 1$,
- (5) $\varphi_5: \mathbb{Q}^+ \rightarrow \mathbb{N}, x \mapsto \lfloor x \rfloor + \lfloor \frac{1}{x} \rfloor$,
- (6) $\varphi_6: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto e^x$,
- (7) $\varphi_7: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+, x \mapsto x^2 + 1$,
- (8) $\varphi_8: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^5 - \sin x$,
- (9) $\varphi_9: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^3 - 2x + 1$,
- (10) $\varphi_{10}: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, n \mapsto \begin{cases} 6n + 1, & \text{ha } n \text{ páros,} \\ 6n - 1, & \text{ha } n \text{ páratlan.} \end{cases}$