5. feladatsor – Logika II.

Házi feladatok:

5.1. Feladat. Állapítsuk meg, logikailag helyes-e az alábbi következtetés, vagyis hogy az (a) csoportba eső állításokból következik-e a (b) állítás.

(1) (a) Ha a 2 prímszám, akkor a 2 a legkisebb prímszám. Ha a 2 a legkisebb prímszám, akkor az 1 nem prímszám. Az 1 nem prímszám.
(b) Tehát a 2 prímszám.

(2) (a) Sári és Béla azonos korú, vagy Sári idősebb Bélánál. Ha Sári és Béla azonos korú, akkor Nelli és Béla nem azonos korú. Ha Sári idősebb Bélánál, akkor Béla idősebb Tibornál.
(b) Tehát Nelli és Béla nem azonos korú, vagy Béla idősebb Tibornál.

(3) (a) Ha nem esik az eső, nem nyitom ki az esernyőmet. Csak akkor nyitom ki az esernyőmet, ha nálam van, és esik. Ha esik az eső, akkor van nálam esernyő.
(b) Tehát, ha esik az eső, akkor kinyitom az esernyőmet.

(4) (a) A $\sqrt{2}$ szám vagy racionális, vagy irracionális. Ha $\sqrt{2}$ racionális, akkor $(\sqrt{2})^2$ is racionális. Vagy $\sqrt{2}$, vagy $(\sqrt{2})^2$ nem racionális.
(b) Tehát $\sqrt{2}$ irracionális.

(5) (a) Ha esik az eső és süt a nap, akkor szivárvány lesz. Ha nem süt a nap, akkor vagy esik az eső, vagy köd van. Csak akkor lehet szivárvány, ha süt a nap.
(b) Tehát, ha szivárvány van, akkor nincs köd.

5.2. Feladat. Megfelelően választott predikátum- és függvényjelek segítségével formalizáljuk az alábbi mondatokat elsőrendű nyelven, majd adjuk meg a kapott formula tagadását úgy, hogy negáció csak prímformulára vonatkozzon. Az individuumtartomány legyen az egész számok halmaza.

(1) Minden egész számnak osztója az 1 és önmaga.
(2) Minden egész számnál létezik kisebb.
(3) Minden 10-zel osztható szám 0-ra végződik.
(4) Van olyan negatív szám, amely négyzete pozitív.
(5) Minden szám pozitív vagy negatív.

Gyakorló feladatok:

5.3. Feladat. Legyen az individdumtartomány az egész számok hamaza, és vezessük be az alábbi függvényjelet, predikátumokat, illetve konstanst:

$$f(x,y) = xy; \quad O(x,y) : x \text{ osztja } y\text{-}t; \quad E(x,y) : x = y; \quad c = 17$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\forall y)(\exists z)\big(O(x,y) \rightarrow E(y, f(x,z))\big)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big((O(x,y) \wedge O(y,x)) \rightarrow E(x,y)\big)$,
(3) $(\forall x)(\exists y)E(f(x,y),c)$,
(4) $(\exists x)(\forall y)(\forall z)\big(O(x, f(y,z)) \rightarrow (O(x,y) \vee O(x,z))\big)$,
(5) $(\exists x)(\exists y)\big(\neg E(x,y) \wedge O(x,y) \wedge O(y,x) \wedge O(x, f(x,y))\big)$.

5.4. Feladat. Legyen az individuumtartomány a **pozitív** egész számok halmaza és definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b) : a \mid b, \quad E(a,b) : a = b.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)P(x,x)$,
(2) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to P(y,x)\big)$,
(3) $(\forall x)(\forall y)\big((P(x,y) \wedge P(y,x)) \to E(x,y)$,
(4) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \vee P(y,x))$.

5.5. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1,2,3,4,5\}$ halmaz és legyen f az az egyváltozós függvényjel A-n, melyre

$$f(1) = 3, \ f(2) = 2, \ f(3) = 1, \ f(4) = 2, \ f(5) = 3.$$

Továbbá definiáljuk a következő predikátumokat:

$$P(a,b) : a + b = 5; \quad Q(x) : x \text{ páros}; \quad E(x,y) : x = y.$$

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(x),y)\big)$,
(2) $(\forall x)(\exists y)\big(E(f(y),x)\big)$,
(3) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(x),y)\big)$,
(4) $(\exists x)(\forall y)\big(E(f(y),x)\big)$,
(5) $(\forall x)(Q(x) \leftrightarrow Q(f(x)))$,
(6) $(\forall x)(\forall y)\big(\neg E(x,y) \to \neg E(f(x),f(y))\big)$,
(7) $(\exists x)(\forall y)\big(\neg E(f(y),x)\big)$,
(8) $(\forall x)(\forall y)\big(P(x,y) \to (Q(x) \leftrightarrow \neg Q(y))\big)$,
(9) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$.

5.6. Feladat. Legyen az individuumtartomány az $A = \{1,2,3,4\}$ halmaz és tekintsük ezen a következő kétváltozós predikátumokat:

P	1	2	3	4
1	i	i	i	h
2	h	i	i	h
3	h	h	h	i
4	h	i	h	i

Q	1	2	3	4
1	i	i	i	h
2	h	i	i	i
3	h	h	i	i
4	i	h	h	i

Döntsük el, hogy az alábbi állítások közül melyek igazak (indoklással együtt):

(1) $(\forall x)Q(x,x)$,
(2) $(\forall x)(\exists y)P(x,y)$,
(3) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$,
(4) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \wedge Q(x,y))$,
(5) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \vee Q(x,y))$,
(6) $(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to Q(x,y))$,
(7) $(\forall x)(\exists y)(P(x,y) \to Q(x,y))$,
(8) $(\exists x)(\forall y)(P(x,y) \to Q(x,y))$.