3. feladatsor – Kongruenciák, maradékosztályok

Házi feladatok:

3.1. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(1) $\begin{aligned} 5x &\equiv 7 \pmod 8, \\ 3x &\equiv 6 \pmod 7; \end{aligned}$ (3) $\begin{aligned} 2x &\equiv 3 \pmod 5, \\ 5x &\equiv 4 \pmod 7; \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} x &\equiv 3 \pmod 2, \\ 4x &\equiv 6 \pmod 5; \end{aligned}$ (4) $\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod 6, \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10}. \end{aligned}$

3.2. Feladat. Határozzuk meg a következő elemeket $\mathbb{Z}_n$-ben, amennyiben léteznek:

(1) $n = 11$, $(\overline{3} - \overline{10}) \cdot \overline{7}^{-1}$,
(2) $n = 8$, $(\overline{5} \cdot \overline{3})^{-1}$,
(3) $n = 9$, $\overline{2}^{-1} \cdot (\overline{5} \cdot \overline{6})^{-1}$,
(4) $n = 7$, $(\overline{5} + \overline{4}) \cdot \overline{3}^{-1}$,
(5) $n = 12$, $\overline{8} \cdot \overline{11} \cdot \overline{5}^{-1}$.

Gyakorló feladatok:

3.3. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciákat.

(a) $6x \equiv 4 \pmod 8$; (b) $13x \equiv -3 \pmod{34}$; (c) $88x \equiv 42 \pmod{55}$;
(d) $38x \equiv 24 \pmod{53}$; (e) $9x \equiv 15 \pmod{12}$; (f) $29x \equiv 17 \pmod{73}$.

3.4. Feladat. Melyik az a 4-re végződő háromjegyű szám, amely 63-mal osztva 1-et ad maradékul?

3.5. Feladat. Határozza meg azt a legkisebb háromjegyű természetes számot, amelynek 12-szerese 6-ot ad maradékul 30-cal osztva.

3.6. Feladat. Oldjuk meg az alábbi kongruenciarendszereket.

(1) $\begin{aligned} 10x &\equiv 16 \pmod 9, \\ 6x &\equiv 3 \pmod{21}, \\ 3x &\equiv 2 \pmod 5; \end{aligned}$ (4) $\begin{aligned} 2x &\equiv 18 \pmod{10}, \\ 10x &\equiv 4 \pmod{12}, \\ 3x &\equiv 9 \pmod{21}; \end{aligned}$

(2) $\begin{aligned} 2x &\equiv 1 \pmod 5, \\ 5x &\equiv -1 \pmod 6, \\ 4x &\equiv 11 \pmod 9. \end{aligned}$ (5) $\begin{aligned} 5x &\equiv 1 \pmod 6, \\ x &\equiv 3 \pmod 7, \\ 7x &\equiv 9 \pmod{10}. \end{aligned}$

(3) $\begin{aligned} 2x &\equiv 13 \pmod 5, \\ 4x &\equiv 1 \pmod 6, \\ x &\equiv 7 \pmod 9; \end{aligned}$

3.7. Feladat. Egy labdarúgó mérkőzésre azonos számú férőhellyel rendelkező buszokkal érkeznek a szurkolók, akiket biztonsági okokból kisebb csoportokban engednek be a stadionba. Ha a szurkolók 4 busszal érkeznek, és 5 fős csoportokban engedik be őket, akkor az utolsó csoportban csak 3 szurkoló marad. Ha 13 busszal érkeznek, és 8-as csoportokban nyernek bebocsátást, akkor szintén 3 szurkoló lesz az utoljára beengedett csoportban. Míg ha 16 busszal érkeznek szurkolók, és egyszerre 9-et léptetnek be, akkor végül 5 szurkoló marad. Hány személyesek a buszok, ha tudjuk, hogy egy buszba legfeljebb 100-an férnek, és a buszok minden esetben tele voltak?

3.8. Feladat. Bizonyos megfigyelések szerint a varjak mindig azonos létszámú rajokban vándorolnak. Ha 11 varjúraj oly módon száll le egy fára, hogy a fa minden ágára 4 varjú kerül, akkor végül egy varjú egyedül marad. Ha 12 varjúraj száll le egy fa ágaira hetes csoportokban, akkor szintén egy varjú egyedül lesz egy ágon. Míg ha 13 varjúraj kilences csoportokban száll le egy fa ágaira, akkor az utolsó ágon 7 varjú lesz. Hány varjú van egy rajban, ha tudjuk, hogy ez a szám nem több, mint 100?

3.9. Feladat. Egy tizenhéttagú kalózcsapat egy zsák aranypénzt lopott. Amikor megpróbálták egyenlően elosztani, azt tapasztalták, hogy három aranypénz kimaradt. A kimaradt aranyak fölötti vitában egy kalózt megöltek. Ezután újraosztották egyenlő arányban a zsákmányt, s most tíz arany maradt ki. Az e fölötti vitában egy újabb kalózt öltek meg, s ezután már el tudták osztani a lopott aranyat úgy, hogy mindenki ugyanannyit kapott. Legkevesebb hány aranypénzt zsákmányoltak? (Segítség: ez egy ókori kínai probléma.)

3.10. Feladat. Oldjuk meg a $73x \equiv 1 \pmod{247}$ kongruenciát. (Útmutatás: Vizsgáljuk külön modulo 13 és modulo 19 a kongruenciát, majd ezek megoldásaiból „gyúrjuk össze” az eredeti kongruencia megoldását a kínai maradéktétel segítségével.)

3.11. Feladat. Oldjuk meg az $x \equiv a \pmod{3}$, $x \equiv b \pmod{5}$, $x \equiv c \pmod{7}$ paraméteres kongruenciarendszert.

3.12. Feladat. Ha egy kosár tojást 2, 3, 4, 5 vagy 6-osával ürítünk ki, rendre 1, 2, 3, 4, 5 tojás marad benne. Ha azonban 7-esével vesszük ki a tojásokat, akkor egy sem marad benne. Legalább hány tojás lehet a kosárban?