12. feladatsor – Algebrai struktúrák

Házi feladatok:

12.1. Feladat.

(1) Teljesül-e tetszőleges asszociatív $(G, \circ)$ grupoid bármely a, b, c elemére az $(a \circ b) \circ c = (b \circ c) \circ a$ egyenlőség?
(2) Teljesül-e tetszőleges asszociatív, egységelemes $(G, \circ)$ grupoid bármely a, b, c elemére, hogy $a \circ c = b \circ c \Longrightarrow a = b$?
(3) Teljesül-e tetszőleges asszociatív, egységelemes $(G, \circ)$ grupoidban, ahol minden elemnek van inverze, bármely a, b, c elemre, hogy $a \circ c = b \circ c \Longrightarrow a = b$?
(4) Teljesül-e tetszőleges $(G, \cdot)$ csoportban bármely a, b, c elemre, hogy $(a \cdot a^{-1}) \cdot b = (c^{-1} \cdot c) \cdot b$, (ahol x^{-1} jelöli az x elem inverzét)?
(5) Teljesül-e tetszőleges $(G, \cdot)$ csoportban bármely a elemre, hogy $a = a^{-1} \Longrightarrow a^2 = e$, (ahol x^{-1} jelöli az x elem inverzét, e az egységelemet)?

A választ indokoljuk: vezessük le, vagy adjunk ellenpéldát.

12.2. Feladat. Tekintsük a grupoidok következő osztályait: grupoid $\supset$ félcsoport $\supset$ monoid $\supset$ csoport $\supset$ Abel-csoport. Határozzuk meg (és indokoljuk), hogy a fentiek közül melyik az a legszűkebb osztály, amelybe a megadott grupoid beleesik.

(1) $(\{\text{páros egészek}\}, +)$
(2) $(\mathbb{Z}^+, \text{lkkt})$
(3) $(\mathbb{Z}_5, \cdot)$
(4) $(\mathbb{R}^2, +)$ (azaz a síkvektorok a szokásos összeadásra nézve)

Gyakorló feladatok:

12.3. Feladat. Legyen G csoport, jelölje $\cdot$ a műveletet, $^{-1}$ az inverzet. Adjuk meg a következő kifejezéseket minél egyszerűbb alakban:

(1) $a^{-1} \cdot (ab)^2 \cdot (b^{-1})^2$,
(2) $(a^3)^4 \cdot (ba)^{-1} \cdot b$,
(3) $(abc)^3 \cdot (c^{-1}b^{-1}a^{-1})^2$,
(4) a^{100}.

Számoljuk ki a fenti kifejezések értékét a következő csoportok megfelelő elemeire:

(a) $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot), a = 2, b = 5, c = -1$,
(b) $(\mathbb{Z}_6, +), a = \overline{3}, b = \overline{2}, c = \overline{4}$,
(c) $(\mathbb{Z}_5^*, \cdot), a = \overline{3}, b = \overline{4}, c = \overline{1}$,
(d) $(S_5, \cdot), a = (134), b = (12)(53), c = (14)$,
(e) $(\mathbb{R}^{2\times 2}, \cdot), a = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, b = c = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12.4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy egy G csoport pontosan akkor kommutatív, ha bármely $a, b \in G$ esetén $aba^{-1}b^{-1} = e$ (ahol $\cdot$ jelöli a műveletet, $^{-1}$ az inverzet, e az egységelem).

12.5. Feladat. Legyen $(T, +, \cdot)$ test a műveletek szokásos jelöléseivel. Adjuk meg a következő kifejezéseket minél egyszerűbb alakban:

(1) $(a + b + c + b) \cdot (b + c)^{-1}$,
(2) $((a^3 + ab) \cdot 0) + (ab^2)$,

(3) $(a+b)^2 - (a-b)^2$,
(4) $(ab)^3 \cdot (-b)^{-2}$,

Számoljuk ki a fenti kifejezések értékét a következő testek megfelelő elemeire:

(a) $(\mathbb{Q}, +, \cdot), a = 2, b = 5, c = -1$,
(b) $(\mathbb{C}, +, \cdot), a = i, b = 2, c = 1 + i$,
(c) $(\mathbb{Z}_5, +, \cdot), a = \overline{3}, b = \overline{4}, c = \overline{2}$.