11. feladatsor – Részbenrendezések, műveletek

Megjegyzés: a 11.3–11.5 feladatok az előző feladatsoron is megtalálhatóak.
D_n jelöli n pozitív osztóit.

Házi feladatok:

11.1. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek?

(1) $(\{2, 3, 5, 6, 9\}, |)$
(2) $(\{\emptyset, \{\emptyset, 1\}, \{1\}, \{1, 2\}\}, \subseteq)$
(3) $(\{-1, 0, 2, 3, 4\}, |)$
(4) $(\{\{\emptyset\}, \{1\}, \{2\}, \{1, 2, 3\}\}, \subseteq)$

11.2. Feladat. Döntsük el, hogy az alábbi grupoidok (1)–(3): idempotensek, illetve kommutatívok-e; (4)–(7): egységelemesek, zéruselemesek-e.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $a \star b = a + (-1)^a b$,
(3) $(\mathbb{R}^+, \circ)$, ahol $a \circ b = a^b$,
(4) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = a$,
(5) $(\mathbb{N}, \star)$, ahol $a \star b = ab - a + b$,
(6) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(7) $(\mathbb{Z}, \star)$, ahol $a \star b = a + (-1)^a b$,

Gyakorló feladatok:

11.3. Feladat. Adjuk meg az alábbi részbenrendezett halmazok Hasse-diagramját! Melyek a minimális, maximális, legkisebb, legnagyobb elemek? Melyek rendezések?

(1) $(D_{30}; \leq)$;
(2) $(D_{30}; |)$;
(3) $(C; |)$, ahol $C = \{2, 3, 4, 5, 6, 12, 24, 36\}$;
(4) $(A; \subseteq)$, ahol $A = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b, c\}, \{a, b, d\}\}$;
(5) $(B; \sqsubseteq)$, ahol $B = \{123, 211, 321, 467, 512, 861, 999\}$, és $a \sqsubseteq b$ pontosan akkor, ha a minden számjegye kisebb vagy egyenlő, mint b megfelelő számjegye,
(6) $(E; \triangleleft)$, ahol $E = \{121, 123, 222, 145, 346, 743, 777, 325, 220\}$, és $\overline{abc} \triangleleft \overline{def} \iff (a < d) \vee ((a = d) \wedge (b < e)) \vee ((a = d) \wedge (b = e) \wedge (c \leq f))$

11.4. Feladat. Adjunk meg olyan Hasse-diagramokat, amelyekben

(1) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 5 eleme van,
(2) 2 minimális, 2 maximális elem van, és összesen 3 eleme van,
(3) bármely két elem összehasonlítható, és összesen 5 eleme van,
(4) bármely két elem összehasonlítható, és nincs benne legkisebb elem,
(5) 3 minimális elem van, nincs legnagyobb elem, és összesen 4 eleme van,

11.5. Feladat. Adjuk meg a következő relációk tranzitív lezártját:

(1) $\{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : a - b = 0\}$,
(2) $\{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : b = a + 1\}$,
(3) $\{(2, 3), (1, 3), (2, 5), (5, 5), (1, 2), (3, 1), (5, 4)\} \subseteq \underline{5} \times \underline{5}$,
(4) $\{(X, Y) \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) : |X \backslash Y| = |Y \backslash X| = 1\}$.

Melyek részbenrendezések, melyek ekvivalenciák?

11.6. Feladat. Döntsük el, hogy műveletek-e az alábbiak:

(1) a kivonás az egész számok halmazán,
(2) a kivonás a természetes számok halmazán,
(3) az osztás a racionális számok halmazán,
(4) az inverzképzés $\mathbb{R}^{n\times n}$-en,
(5) a szorzás $\mathbb{R}^{m\times n}$-en.

11.7. Feladat. Határozzuk meg a következő grupoidok egységelemét és döntsük el, hogy minden elemnek van-e inverze.

(1) $(\mathbb{R}, \circ)$, ahol $a \circ b = ab + a + b$,
(2) $(\mathbb{N}, \mathrm{lkkt})$,
(3) $(P(U), \triangle)$, ahol U tetszőleges halmaz.

11.8. Feladat. Definiáljuk az S_8 halmazon a következő műveletet:

$$\alpha \star \beta = \alpha(1\ 3\ 4)(2\ 5)\beta.$$

Határozzuk meg az $(S_8, \star)$ grupoid egységelemét és döntsük el, hogy van-e minden elemnek inverze.

11.9. Feladat. Definiáljuk az $\mathbb{R}$ halmazon az $\oplus$ és $\odot$ műveleteket a következőképpen:

$$a \oplus b = a + b - 1 \text{ és } a \odot b = a + b - ab.$$

Döntsük el, hogy disztributív, illetve abszorptív-e $\odot$ az $\oplus$-ra.

11.10. Feladat. Tekintsük az $\underline{4}$ halmaz alábbi műveleteit (a táblázat i. sorának j. eleme az $i \circ j$ elem), és döntsük el, hogy az $(\underline{4}, \circ)$ grupoid egységelemes, zéruselemes, kommutatív, illetve asszociatív-e.

(1)

$\circ$	1	2	3	4
1	2	4	1	1
2	1	3	2	4
3	1	2	3	4
4	4	4	4	4

(2)

$\circ$	1	2	3	4
1	2	2	3	1
2	2	2	2	2
3	1	2	4	4
4	3	2	2	4

11.11. Feladat. Tekintsük az $(\mathbb{N}^{\mathbb{N}}, \circ)$ grupoidot, ahol $\circ$ a szokásos leképezésszorzás. Legyen $\phi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, x \mapsto 2x$. Keressünk olyan $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ elemet, melyre $\phi\psi = \mathrm{id}$, illetve olyat is, melyre $\psi\phi = \mathrm{id}$.