

## 5. feladatsor – Algebrai struktúrák

$\mathbb{Z}_n^*$  jelöli  $\mathbb{Z}_n$  azon maradékosztályait, melynek elemei  $n$ -hez relatív prímek.

**5.1. Feladat.** Adjunk példát

- (a) véges csoportra;
- (b) kontinuum elemszámú nemkommutatív csoportra;
- (c) olyan csoportra, amelyben az egységelem kivételével minden elem rendje végtelen;
- (d) olyan csoportra, amelyben minden elem rendje véges;
- (e) olyan csoportra, amelyben van több véges és végtelen rendű elem is;
- (f) olyan csoportra, amelyben minden egységelemtől különböző elem rendje 5;
- (g) olyan véges gyűrűre, amely nem test;
- (h) véges nemkommutatív gyűrűre.

**5.2. Feladat.** Készítsük el az alábbi grupoidok művelet tábláját, és ennek alapján állapítsuk meg, hogy melyik grupoid kommutatív, melyekben van zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban határozzuk meg, hogy mely elemeknek van inverze.

- (a)  $(\{-1, 0, 1\}; \cdot)$ ;
- (b)  $(\{-1, 0, 1\}; \sqcup)$ , ahol  $a \sqcup b = \max(a, b)$ ;
- (c)  $(P(\{1, 2\}); \setminus)$ ;
- (d)  $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \rightarrow)$ , ahol  $\mathbf{i}$  az igaz,  $\mathbf{h}$  a hamis logikai érték.

**5.3. Feladat.** Az alábbi művelet táblázatok alapján döntsük el, hogy kommutatív-e, kancellatív-e a művelet, van-e a grupoidban zéruselem, illetve egységelem? Ha van egységelem, akkor mely elemeknek van inverze?

	$\circ$	$a$	$b$	$c$	$d$		$*$	$a$	$b$	$c$	$d$
	$a$	$a$	$a$	$a$	$a$		$a$	$a$	$b$	$c$	$d$
(a)	$b$	$a$	$b$	$c$	$d$	(b)	$b$	$b$	$c$	$a$	$a$
	$c$	$b$	$c$	$b$	$b$		$c$	$c$	$a$	$b$	$a$
	$d$	$d$	$d$	$a$	$a$		$d$	$d$	$d$	$d$	$d$

**5.4. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok asszociatívak-e, kommutatívak-e, van-e bennük zéruselem, illetve egységelem. Az egységelemes grupoidokban keressük meg azokat az elemeket, amelyeknek van inverze. Ez alapján döntsük el, hogy a grupoid, félcsoportot, monoidot vagy csoportot alkot-e.

- (a)  $(\mathbb{Q}; \circ)$ , ahol  $q \circ r = q$ ;
- (b)  $(\mathbb{N}; *)$ , ahol  $m * n = mn - m + n$ ;
- (c)  $(\mathbb{R}; \square)$ , ahol  $x \square y = 12 - 3x - 3y + xy$ ;
- (d)  $(\mathbb{R}; \triangle)$ , ahol  $x \triangle y = xy - 2(x + y) + 6$ ;
- (e)  $(\mathbb{R}; \sqcup)$ , ahol  $x \sqcup y = \max(x, y)$ ;
- (f)  $(\{r \in \mathbb{R} \mid 0 \leq r \leq 1\}; \oplus)$ , ahol  $x \oplus y = |x - y|$ ;
- (g)  $(S_4; *)$ , ahol  $\alpha * \beta = \alpha(134)\beta$ .

**5.5. Feladat.** Vizsgáljuk meg, hogy a következő grupoidok közül melyek félcsoportok, melyek monoidok, melyek csoportok, és melyek Abel-csoportok. (Jelölje  $M_2$  a

$2 \times 2$ -es nemnulla determinánsú valós mátrixok halmazát.)

- (a)  $(\mathbb{N}; +)$ ;      (b)  $(\mathbb{N}_0; +)$ ;      (c)  $(\mathbb{Z}; +)$ ;      (d)  $(\mathbb{Q}; +)$ ;  
 (e)  $(\mathbb{Z}_{12}; +)$ ;      (f)  $(\mathbb{Z}; \cdot)$ ;      (g)  $(\mathbb{Q}; \cdot)$ ;      (h)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}; \cdot)$ ;  
 (i)  $(\mathbb{R}^+; \cdot)$ ;      (j)  $(\mathbb{Z}_{12}; \cdot)$ ;      (k)  $(P(\mathbb{N}); \cap)$ ;      (l)  $(P(\mathbb{N}); \Delta)$ ;  
 (m)  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +)$ ;      (n)  $(M_2; \cdot)$       (o)  $(S_8; \cdot)$       (p)  $(\mathbb{Z}_8^*; \cdot)$ .

**5.6. Feladat.** Melyek alkotnak hálót, melyek gyűrűt, és melyek alkotnak testet az alábbiakban megadott algebraik közül?

- (a)  $(\mathbb{N}; +; \cdot)$ ;      (b)  $(\mathbb{Z}; +; \cdot)$ ;      (c)  $(\mathbb{Q}; +; \cdot)$ ;      (d)  $(\mathbb{R}; +; \cdot)$   
 (e)  $(\mathbb{Z}_{12}; +; \cdot)$ ;      (f)  $(\mathbb{Z}_{13}; +; \cdot)$ ;      (g)  $(P(\mathbb{N}); \Delta; \cap)$ ;      (h)  $(\mathbb{R}^{2 \times 2}; +; \cdot)$   
 (i)  $(\mathbb{Z}; \max; \min)$ ;      (j)  $(\mathbb{N}; \text{lnko}; \min)$ ;      (k)  $(\mathbb{N}_0; \text{lnko}; \text{lkkt})$       (l)  $(\mathbb{Z}_{12}^*; +; \cdot)$ .

**5.7. Feladat.** Végezzük el a következő műveleteket a  $\mathbb{Z}_{17}$  testben.

$$(a) \bar{9} + \bar{12}; \quad (b) \bar{2} \cdot \bar{11}; \quad (c) \frac{\bar{2}}{\bar{9}}; \quad (d) \bar{11}^{18}; \quad (e) \bar{11}^{15}.$$

**5.8. Feladat.** Végezzük el a következő műveleteket a  $\mathbb{Z}_{15}$  gyűrűben.

$$(a) \bar{8} + \bar{9}; \quad (b) \bar{3} \cdot \bar{8}; \quad (c) \frac{\bar{2}}{\bar{7}}; \quad (d) \frac{\bar{1}}{\bar{5}}; \quad (e) \bar{2}^{10}.$$

**5.9. Feladat.** Határozzuk meg a következő csoportokban a megadott elemek rendjét.

- (a)  $(\mathbb{Z}, +)$ ,  $o(1)$ ;      (b)  $(\mathbb{Q} \setminus \{0\}, \cdot)$ ,  $o(-1)$ ;      (c)  $(\mathbb{Z}_8, +)$ ,  $o(\bar{6})$ ;  
 (d)  $(\mathbb{Z}_{15}, +)$ ,  $o(\bar{7})$ ;      (e)  $(\mathbb{Z}_7^*, \cdot)$ ,  $o(\bar{3})$ ;      (f)  $(\mathbb{Z}_9^*, \cdot)$ ,  $o(\bar{5})$ ;  
 (g)  $(S_8, \cdot)$ ,  $o((143)(65))$ ;      (h)  $(S_8, \cdot)$ ,  $o((231)(753))$ .