MBLK12: Relációk és műveletek (levelező)

(előadásvázlat)

Maróti Miklós, Kátai-Urbán Kamilla

Jelölje $\mathbb{Z}$ az egész számok halmazát, $\mathbb{N}$ a pozitív egészek halmazát, $\mathbb{N}_0$ a nem negatív egészek halmazát, $\mathbb{Q}$ a racionális számok halmazát, $\mathbb{R}$ a valós számok halmazát, $\mathbb{R}_0^+$ a nem negatív valós számok halmazát, és $\mathbb{R}^{m\times n}$ az $m \times n$-es valós mátrixok halmazát.

1. Osztályozás és ekvivalenciareláció

1. Definíció. Tetszőleges A halmazra $\mathcal{P}(A)$ egy $\mathcal{C}$ részhalmazát az A osztályozásának vagy partíciójának nevezzük, ha a $\mathcal{C}$-beli halmazok

(1) nem üresek,
(2) egyesítésük A, és
(3) páronként diszjunktak.

A $\mathcal{C}$-beli halmazokat osztályoknak vagy blokkoknak nevezzük.

2. Példa. Legyen $A = \{1, 2, 3\}$ és keressük meg A összes osztályozását (partícióját). A definíció szerint A éppen a $\mathcal{C}$-beli halmazok diszjunkt uniója. A 3-elemű halmazt fel lehet bontani három egyelemű osztályra ($3 = 1 + 1 + 1$), vagy egy kételemű és egy egyelemű osztályra ($3 = 2 + 1$), vagy egyetlen 3-elemű osztályra ($3 = 3$). Minden esetben meg kell vizsgálni, hogy hány ilyen felbontás lehetséges, és azt kapjuk, hogy összesen 5 osztályozása van A-nak:

(1) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}\}$,
(2) $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$,
(3) $\mathcal{C} = \{\{1\}, \{2, 3\}\}$,
(4) $\mathcal{C} = \{\{1, 3\}, \{2\}\}$, vagy
(5) $\mathcal{C} = \{\{1, 2, 3\}\}$.

3. Definíció. Az a egész szám modulo m maradékosztályán az $\overline{a} = \{\, b \in \mathbb{Z} \colon b \equiv a \pmod{m} \,\}$ halmazt értjük. A modulo m maradékosztályok halmazát $\mathbb{Z}_m$ jelöli, azaz $\mathbb{Z}_m = \{\, \overline{0}, \overline{1}, \dots, \overline{m-1}\}$.

4. Példa. A 3. definícióban megadott összes $\overline{a}$ maradékosztály részhalmaza $\mathbb{Z}$-nek, és ezek diszjunkt uniója éppen $\mathbb{Z}$. Tehát $\mathbb{Z}_m$ az egész számok egy osztályozása.

5. Példa. Vegyük azt az osztályozását $\mathbb{Z}$-nek, melyben az azonos abszolutértékű számok kerülnek egy osztályba. Ekkor a $\mathcal{C} = \{\{0\}, \{1, -1\}, \{2, -2\}, \dots\}$ osztályozását kapjuk, melynek csak egyetlen egy egyelemű osztálya van, minden más osztálya kételemű.

6. Definíció. Legyen $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozása az A halmaznak. Ekkor az $a \in A$ elem osztályán azt a $B \in \mathcal{C}$ osztályt értjük, amelyre $a \in B$, és ezt az osztályt $\overline{a}$-val jelöljük.

7. Példa. A 2. példa $\mathcal{C} = \{\{1, 2\}, \{3\}\}$ osztályozására $\overline{1} = \{1, 2\}$, $\overline{2} = \{1, 2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. A 3. definícióban megadott $\overline{a}$ éppen az a elem osztálya, azaz az előző definícióban megadott jelölés ugyan azt adja mint ahogy a maradékosztályokat definiáltuk. A 5. példában $\overline{0} = \{0\}$ és $\overline{1} = \{-1, 1\}$.

8. Definíció. Tetszőleges A halmazra az $A \times A$ halmaz részhalmazait relációknak nevezzük. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) reflexív, ha $(\forall a \in A)(a, a) \in \varrho$;
(2) szimmetrikus, ha $(\forall a, b \in A)\big((a, b) \in \varrho \to (b, a) \in \varrho\big)$; és
(3) tranzitív, ha $(\forall a, b, c \in A)\big(((a, b) \in \varrho \wedge (b, c) \in \varrho) \to (a, c) \in \varrho\big)$.

A relációt ekvivalenciarelációnak nevezzük, ha reflexív, szimmetrikus és tranzitív.

9. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon tekintsük a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\} \subseteq A \times A$ relációt. Ez reflexív, mert $(1, 1)$, $(2, 2)$ és $(3, 3)$ is eleme ϱ-nak. Szimmetrikus is, mert például az $(1, 2) \in \varrho$ elempárt tekinte látjuk, hogy $(2, 1)$ is eleme ϱ-nak; vagy ha az $(1, 1) \in \varrho$ elempárt tekintjük, akkor a $(1, 1) \in \varrho$. Hasonlóan látható, hogy ϱ tranzitív is, ezért ϱ ekvivalenciareláció.

10. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ reláció nem reflexív, mert $(1, 1) \notin \varrho$. A reláció szimmetrikus, viszont nem tranzitív, mert $(1, 2), (2, 1) \in \varrho$ de $(1, 1) \notin \varrho$.

11. Definíció. Legyen $\varphi \colon A \to B$ leképezés, ekkor a φ magján a következő relációt értjük az A-n:

$$\{(a_1, a_2) \in A \times A \colon a_1\varphi = a_2\varphi\}.$$

A relációt $\ker\varphi$-vel jelöljük.

12. Példa. A $\varphi \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z},\ x\varphi = |x|$ leképezésnél $\ker\varphi = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \colon |a| = |b|\}$.

13. Tétel. Tetszőleges $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{P}(A)$ osztályozásra a

$$\varrho = \{\, (a, b) \in A \times A : \overline{a} = \overline{b} \,\}$$

reláció ekvivalenciareláció.

14. Példa. A 5. példában megadott osztályozáshoz a

$$\begin{aligned}\varrho = \{(0, 0), (1, 1), (1, -1), (-1, 1), (-1, -1), (2, 2), (2, -2), (-2, 2), (-2, -2), \dots\}\\ = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : |a| = |b|\,\}\end{aligned}$$

ekvivalenciareláció tartozik, amely megegyezik a 12 példában megadott leképezés magjával.

15. Definíció. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció. Az $a \in A$ elem osztálya alatt az

$$\overline{a} = \{\, b \in A : (a, b) \in \varrho \,\}$$

halmazt értjük. Definiáljuk a $A/\varrho = \{\overline{a} \in \mathcal{P}(A) : a \in A\,\}$ halmazt, melyet a ϱ ekvivalenciarelációhoz tartozó osztályozásnak vagy az A halmaz ϱ szerinti faktorhalmazának nevezünk.

16. Példa. Tekintsük az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciarelációt. Ekkor $\overline{1} = \{\, b \in A : (1, b) \in \varrho \,\} = \{1, 2\}$. Hasonlóan $\overline{2} = \{1, 2\}$ és $\overline{3} = \{3\}$. Tehát definiíció szerint

$$A/\varrho = \{\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}\} = \{\{1, 2\}, \{1, 2\}, \{3\}\} = \{\{1, 2\}, \{3\}\},$$

ami osztályozása A-nak.

17. Tétel. Tetszőleges $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciarelációra A/ϱ osztályozása A-nak.

18. Tétel. Legyen $\mathcal{C}$ osztályozása az A halmaznak, ϱ a 13. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció, és $\mathcal{C}' = A/\varrho$ a 17. tétel szerint származtatott osztályozás. Ekkor $\mathcal{C} = \mathcal{C}'$, azaz visszakaptuk az eredeti osztályozást.

19. Tétel. Legyen $\varrho \subseteq A \times A$ ekvivalenciareláció, $\mathcal{C} = A/\varrho$ a 17. tétel szerint származtatott osztályozás, és ϱ' a 13. tétel szerint $\mathcal{C}$-ből származtatott ekvivalenciareláció. Ekkor $\varrho = \varrho'$, azaz visszakaptuk az eredeti ekvivalenciarelációt.

20. Következmény. Rögzített A halmazon az osztályozások és ekvivalenciarelációk kölcsönösen megfeleltethetők egymásnak, azaz ugyan annyian vannak.

2. Részbenrendezés és Hasse-diagram

21. Definíció. A $\varrho \subseteq A \times A$ reláció

(1) antiszimmetrikus, ha $(\forall a, b \in A)\big(((a, b) \in \varrho \wedge (b, a) \in \varrho) \to a = b\big)$;
(2) dichotom, ha bármely $(\forall a, b \in A)\big((a, b) \in \varrho \vee (b, a) \in \varrho\big)$.

A ϱ reláció részbenrendezés, ha reflexív, antiszimmetrikus és tranzitív, ekkor az $(A; \varrho)$ párt részbenrendezett halmaznak nevezzük. A ϱ reláció (lineáris) rendezés, ha részbenrendezés és dichotom.

22. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 3)\}$ reláció részbenrendezés, de nem rendezés, mert $(2, 3), (3, 2) \notin \varrho$.

23. Példa. Az $A = \{1, 2, 3\}$ halmazon a $\varrho = \{(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 2), (3, 3)\}$ ekvivalenciareláció nem részbenrendezés, mert $(1, 2), (2, 1) \in \varrho$ és $1 \neq 2$.

24. Példa. A nemnegatív egészek $\mathbb{N}_0$ halmazán az oszthatóság reláció részbenrendezés, de nem rendezés. Az egészek halmazán az oszthatóság reláció nem részbenrendezés, mert nem dichotom: $1 \mid -1$ és $-1 \mid 1$.

25. Példa. Tetszőleges A halmazra a $\mathcal{P}(A)$ hatványhalmazon a $\subseteq$ részhalmaz reláció részbenrendezés. $\mathcal{P}(A)$ tetszőleges részhalmaza a tartalmaz-sra nézve részbenrendezés.

26. Példa. Legyen A rögzített halmaz, és tekintsük az összes ekvivalenciareláció halmazát A-n:

$$\mathrm{Equ}(A) = \{\, \varrho \subseteq A \times A : \varrho \text{ ekvivalenciareláció} \,\}.$$

Ekkor $\mathrm{Equ}(A)$-n a részhalmaz reláció részbenrendezés.

27. Definíció. Legyen ϱ részbenrendezés az A halmazon. Ha ez nem vezet félreértésre, akkor $(a, b) \in \varrho$ helyett $a \leq b$-t írunk, és a $a < b$ jelölést használjuk arra, hogy $a \leq b$ és $a \neq b$. Azt mondjuk, hogy a $b \in A$ elem fedi az $a \in A$ elemet, és ezt $a \prec b$-vel jelöljök, ha $a < b$ és nincs olyan $c \in A$ hogy $a < c < b$.

28. Megjegyzés. A részbenrendezéseket úgy szemléltethetjük, hogy az elemek közt csak a fedési relációt rajzoljuk be mégpedig úgy, hogy ha $a \prec b$, akkor a-t lejebb rajzoljuk, mint b-t. Ekkor a $d \leq e$ relációt úgy olvashatjuk le a diagramról, hogy van egy felfelé vezető út d-ből e-be néhány közbülső $c_1, \ldots, c_n$ elemen keresztül, azaz $d \prec c_1 \prec c_2 \prec \cdots \prec c_n \prec e$. Ezt a diagramot a részbenrendezés Hasse-diagramjának nevezzük.

29. Példa. Vegyük a 12 pozitív osztóinak halmazát az oszthatóság részbenrendezéssel. Ekkor összesen 7 fedő pár van:

$$1 \prec 2, \quad 1 \prec 3, \quad 2 \prec 4, \quad 2 \prec 6, \quad 3 \prec 6, \quad 4 \prec 12, \quad 6 \prec 12,$$

azaz a Hasse-diagram 6 pontból és 7 élből áll.

30. Példa. A racionális számok halmazán a szokásos $\leq$ rendezésben nincsen fedő pár.

31. Tétel. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A véges halmazon. Ekkor a részbenrendezést a fedési reláció (azaz a Hasse-diagram) egyértelműen meghatározza.

32. Definíció. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon. Az $m \in A$ elem maximális, ha nincs olyan $a \in A$ hogy $m < a$. Duális módon definiáljuk a minimális elemet.

33. Példa. Egy részbenrendezésnek lehet több maximális és minimális elem is, és az is előfordulhat hogy nincs maximális vagy minimális elem. Például az $A = \{ n \in \mathbb{N} : n \geq 2 \}$ halmazon az oszthatóság részbenrendezés, amelynek nincsen maximális eleme, de végtelen sok minimális eleme van, melyek éppen a prímszámok.

34. Tétel. Véges halmazon minden részbenrendezésnek van maximális és minimális eleme.

35. Definíció. Legyen $\leq$ részbenrendezés az A halmazon. Az $m \in A$ elemet legnagyobb elemnek nevezzük, ha minden $a \in A$ elemre $a \leq m$. Duális módon definiáljuk a legkisebb elemet.

36. Tétel. Egy részbenrendezésnek legfeljebb egy legnagyobb és egy legkisebb eleme lehet.

37. Tétel. Ha ϱ és σ tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus) relációk az A halmazon, akkor $\varrho \cap \sigma$ is tranzitív (reflexív, szimmetrikus, antiszimmetrikus).

3. Műveleti tulajdonságok

38. Jelölés. Legyen A egy tetszőleges halmaz, jelölje A^n az n-tényezős $A \times A \times \cdots \times A$ Descartes-szorzatot.

39. Definíció. Legyen A tetszőleges nemüres halmaz, és $n \in \mathbb{N}_0$. Az A-n értelmezett n-változós műveleten egy $A^n \to A$ leképezést értünk, n-et a művelet változószámának (aritásának) nevezzük.

40. Megjegyzés. Az előző definíció $n = 0$ esetén egy elem kijelölését jelenti az A halmazból.

41. Tétel. A $\mathbb{Z}_m$ halmazon művelet a következőképpen definiált összeadás, kivonás és szorzás:

$$\overline{a} + \overline{b} = \overline{a + b}, \qquad \overline{a} - \overline{b} = \overline{a - b}, \qquad \overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{a \cdot b}.$$

42. Definíció. Legyen A tetszőleges nemüres halmaz, $\mathcal{F}$ pedig jelölje az A-n értelmezett műveletek egy halmazát, ekkor az $(A; \mathcal{F})$ párt algebrának nevezzük.

43. Példa. Ha az előző definícióban szereplő $\mathcal{F}$ véges halmaz, akkor elemeit felsoroljuk a halmaz jelet elhagyva, például algebrák a következők: $(\mathbb{Z}; +, \cdot)$, $(\mathbb{Z}; -)$, $(\mathbb{N}; 1, \cdot)$, $(\mathbb{R}^3; +)$, $(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$, $(\mathbb{Z}; \min, \max)$, $(\mathbb{N}; \text{lnko}, \text{lkkt})$, $(\mathbb{Z}_{12}; +, \cdot)$, $(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \neg, \wedge, \vee, \rightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \emptyset, \overline{\ }, \cap, \cup, \triangle)$, $(S_n; \cdot)$, $(S_n; \text{id}, \cdot)$.

44. Definíció. Azokat az algebrákat, amelyeknek egy kétváltozós művelete van grupoidnak nevezzük.

45. Példa. A 43. példában megadott algebrák közül a következők grupoidok: $(\mathbb{Z}; -)$, $(\mathbb{R}^2; +)$, $(S_n; \cdot)$.

46. Definíció. (Grupoid műveleti tulajdonságai)

(1) Az $(A; \circ)$ grupoid idempotens, ha $(\forall a \in A)(a \circ a = a)$.
(2) Az $(A; \circ)$ grupoid asszociatív, ha $(\forall a, b, c \in A)\big(a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c\big)$.
(3) Az $(A; \circ)$ grupoid kommutatív, ha $(\forall a, b \in A)(a \circ b = b \circ a)$.
(4) Az $(A; \circ)$ grupoidban van zéruselem, ha $(\exists o \in A)(\forall a \in A)(a \circ o = o \circ a = o)$.
(5) Az $(A; \circ)$ grupoidban van egységelem, ha $(\exists e \in A)(\forall a \in A)(a \circ e = e \circ a = a)$.
(6) Ha az $(A; \circ)$ grupoidban e egységelem, és $(\forall a \in A)(\exists b \in A)(a \circ b = b \circ a = e)$, akkor minden elemnek van inverze.

47. Tétel. Bármely grupoidban legfeljebb egy egységelem és legfeljebb egy zéruselem van.

48. Definíció. Ha a grupoidnak van egységeleme, egységelemes, ha van zéruseleme, zéruselemes grupoidnak nevezzük.

49. Példa. Olyan grupoidokra adunk példát, melyek a 46. definícióban szereplő tulajdonságokkal rendelkeznek.

(1) Idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z}; \min), (\mathbb{N}; \text{lkkt}), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \vee), (\mathcal{P}(U); \cap)$.
(2) Asszociatív grupoidok: $(\mathbb{N}; \cdot), (\mathbb{R}^3; +), (\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot), (\mathbb{N}; \text{lnko}), (\mathbb{Z}; \max), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \wedge), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \leftrightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \cup), (\mathcal{P}(U); \triangle), (A^A; \cdot), (S_n; \cdot)$.
(3) Kommutatív grupoidok: $(\mathbb{N}; \cdot), (\mathbb{R}^3; +), (\mathbb{N}; \text{lnko}), (\mathbb{Z}; \max), (\mathbb{Z}_4; +), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \wedge), (\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \leftrightarrow)$, $(\mathcal{P}(U); \cup), (\mathcal{P}(U); \triangle)$.
(4) Zéruselemes grupoidok:

grupoid	zéruselem
$(\mathbb{Z}; \cdot)$	0
$(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right)$
$(\mathbb{N}; \text{lnko})$	1
$(\mathbb{Z}_3; \cdot)$	$\overline{0}$
$\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \wedge)$	$\mathbf{h}$
$\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \vee)$	$\mathbf{i}$
$(\mathcal{P}(U); \cap)$	$\emptyset$
$(\mathcal{P}(U); \cup)$	U

(5) Egységelemes grupoidok:

grupoid	egységelem
$(\mathbb{Z}; \cdot)$	1
$(\mathbb{Z}; +)$	0
$(\mathbb{R}^{2\times 2}; \cdot)$	$\left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$
$(\mathbb{Z}_3; \cdot)$	$\overline{1}$
$(\mathbb{Z}_4; +)$	$\overline{0}$
$(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \wedge)$	$\mathbf{i}$
$(\{\mathbf{i}, \mathbf{h}\}; \leftrightarrow)$	$\mathbf{i}$
$(\mathcal{P}(U); \cup)$	$\emptyset$
$(\mathcal{P}(U); \triangle)$	$\emptyset$
A^A	id_A
$(S_n; \cdot)$	id

(6) Egységelmeles grupoidok, ahol minden elemnek van inverze:

grupoid	a inverze
$(\mathbb{Z};+)$	$-a$
$(\mathbb{R}^3;+)$	$-a$
$(\mathbb{Q}\setminus\{0\};\cdot)$	$\frac{1}{a}$
$(\mathbb{Z}_3\setminus\{\overline{0}\};\cdot)$	a
$(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow)$	a
$(\mathcal{P}(U);\triangle)$	a
$(S_n;\cdot)$	a^{-1}

50. Példa. Olyan grupoidokra adunk példát, melyek NEM rendelkeznek a 46. definícióban szereplő tulajdonságokkal.

(1) Nem idempotens grupoidok: $(\mathbb{Z};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\mathbb{Z}_4;+),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(2) Nem asszociatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.
(3) Nem kommutatív grupoidok: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(A^A;\cdot),(S_n;\cdot)$.
(4) Grupoidok, ahol nincs zéruselem: $(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Z};+),(\mathbb{N};\cdot),(\mathbb{R}^3;+),(\mathbb{Z}_4;+),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),$ $(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\leftrightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus),(\mathcal{P}(U);\triangle),(S_n;\cdot)$.
(5) Grupoidok, ahol nincs egységelem: $(\mathbb{N};+),(\mathbb{Z};-),(\mathbb{Q}\setminus\{0\};:),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\rightarrow),(\mathcal{P}(U);\setminus)$.
(6) Egységelemes grupoidok, ahol nincs minden elemnek inverze: $(\mathbb{N}_0;+),(\mathbb{Z};\cdot),(\mathbb{Q};\cdot),(\mathbb{R}^{2\times 2};\cdot),$ $(\mathbb{Z}_3;\cdot),(\mathbb{Z}_4;\cdot),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\wedge),(\{\mathbf{i},\mathbf{h}\};\vee),(\mathcal{P}(U);\cap),(\mathcal{P}(U);\cup),(A^A;\cdot)$.

51. Definíció. Legyen $\circ$ és $\star$ két kétváltozó művelet az A halmazon.

(1) A $\circ$ disztributív a $\star$-ra nézve, ha
$$(\forall a,b,c\in A)((a\circ(b\star c)=(a\circ b)\star(a\circ c))\wedge((b\star c)\circ a=(b\circ a)\star(c\circ a))).$$
(2) A $\circ$ abszorptív a $\star$-ra nézve, ha
$$(\forall a,b\in A)\big((a\circ(a\star b)=a)\wedge((a\star b)\circ a=a)\big).$$

52. Példa. Az 51. definícióban szereplő fogalmakra adunk példát.

(1) Az $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ halmazon a $\cdot$ disztributív a $+$-ra. Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko disztributív a lkkt-re, és a lkkt is disztributív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ disztributív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is disztributív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ disztributív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is disztributív a $\cap$-ra, továbbá a $\cap$ disztributív a $\triangle$-ra.
(2) Az $\mathbb{N}$ halmazon a lnko abszorptív a lkkt-re, és a lkkt is abszorptív a lnko-ra. Az $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ halmazon a $\wedge$ abszorptív a $\vee$-ra, és fordítva, a $\vee$ is abszorptív a $\wedge$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon a $\cap$ abszorptív a $\cup$-ra, és fordítva, az $\cup$ is abszorptív a $\cap$-ra.

53. Példa. Olyan műveletekre adunk példát, amelyek NEM teljesítik az 51. definícióban megadott tulajdonságokat.

(1) Az $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ halmazon a $+$ nem disztributív a $\cdot$ -ra. Az $\{\mathbf{i},\mathbf{h}\}$ halmazon az $\rightarrow$ nem disztributív a $\vee$-ra.
(2) Az $\mathbb{R},\mathbb{Q},\mathbb{Z},\mathbb{N}$ halmazon a $\cdot$ nem abszorptív a $+$-ra. A $\mathcal{P}(U)$ halmazon az $\cup$ nem abszorptív a $\triangle$-ra.